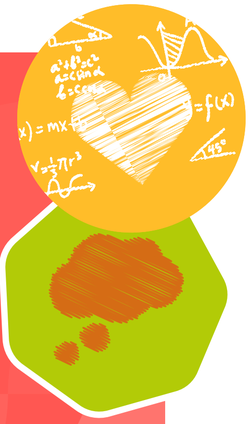


SEQUÊNCIA DIDÁTICA 3

Fatoração, Equação do 2º grau, Função do 2º grau, Teorema de Pitágoras e Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Material do professor/a

Sumário

03 Ficha técnica
04 Jornada de fortalecimento
09 Boas-vindas
22 Introdução
33 Atividades
34 Atividade 1
57 Atividade 2
89 Atividade 3
106 Atividade 4
136 Atividade 5
141 Materiais de apoio
142 Plano de estudos
150 Anexo 1
153 Anexo 2
156 Anexo 3
159 Anexo 4
160 Anexo 5
164 Anexo 6
166 Anexo 7
168 Anexo 8
170 Anexo 9
175 Anexo 10
178 Anexo 11

FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM

REALIZADORES

IDEALIZAÇÃO

Instituto Reúna

REALIZAÇÃO

Instituto Reúna

Instituto Unibanco

APOIO INSTITUCIONAL

Fundação Lemann

Imaginable Futures

INSTITUTO REÚNA

DIRETORA-EXECUTIVA

Kátia Stocco Smole

CONSELHO CONSULTIVO

Camila Pereira Cardoso

Marisa de Santana da Costa

Priscila Fonseca da Cruz

Wilson Martins Poit

CONSELHO FISCAL

Alex Rodrigues

Camila Anker

Emilio Carlos Morais Martos

Renata Borges La Guardia

COORDENAÇÃO DA INICIATIVA

Cléa Maria da Silva

Isabela Chiferi Vanelli

Lorena Polo

Mariana Costa Marcondes

Priscila Oliveira

EQUIPE DE AVALIAÇÃO

Beatriz Nunes

Filomena Siqueira

Nathaly Corrêa de Sá

Stefanny Lopes Fernandes

EQUIPE DE RELAÇÕES INSTITUCIONAIS E COMUNICAÇÃO

Fabiana Cabral

Milena Emilião

Roberto Martinez

Vinicius Pinto

ESTRATÉGIA E PRODUTO

Fabiana Cabral

EQUIPE DE PRODUÇÃO

CONSULTORIA PEDAGÓGICA

Marisa Balthasar

COORDENADORA DE MATEMÁTICA

Cristiane R. Chica - Mathema

COORDENADORA DE LÍNGUA PORTUGUESA

Eliane Aguiar

AUTORAS DO TEXTO DA JORNADA DE FORTALECIMENTO E APRESENTAÇÃO DA INICIATIVA

Carolina Rodrigues Miranda

Kátia Stocco Smole

Priscila Oliveira

AUTORAS DE MATEMÁTICA

Carla S. Moreno Battaglioli - Mathema

Cristiane R. Chica - Mathema

Sandra Regina Corrêa Amorim - Mathema

AUTORAS DE LÍNGUA PORTUGUESA

Eliane Aguiar- Porthema

Cláudia Barros Lima - Porthema

Taila Virgine Costa - Porthema

LEITURA CRÍTICA DE MATEMÁTICA

Kátia Stocco Smole

Daniela Arai

Fernanda Arantes e Silva

LEITURA CRÍTICA DE LÍNGUA PORTUGUESA

Daniela Arai

Fernanda Arantes e Silva

Marisa Balthasar

Paula Cristina Marques

LEITURA CRÍTICA COM FOCO EM PROJETO DE VIDA, JUVENTUDES E COMPETÊNCIAS SOCIOEMOCIONAIS

Carolina Rodrigues Miranda

LEITURA CRÍTICA COM FOCO EM DIVERSIDADE

Mayana Hellen Nunes da Silva

LEITURA CRÍTICA DO TEXTO DA JORNADA DE FORTALECIMENTO E APRESENTAÇÃO DA INICIATIVA

Cristiane R. Chica

Daniela Arai

Fernanda Arantes e Silva

Marisa Balthasar

REVISÃO DE TEXTO

Heloísa Orsi Koch Delgado

Mariane de Mello Genaro

PROJETO GRÁFICO E DIAGRAMAÇÃO

Thaís Bellini

Thaís Martho

Thiago Vieira

INFOGRAFIA

Alessandro Meiguins

INSTITUTO UNIBANCO

CONSELHO DE ADMINISTRAÇÃO

PRESIDENTE

Pedro Moreira Salles

VICE-PRESIDENTE

Pedro Sampaio Malan

CONSELHEIROS

Antonio Jacinto Matias

Claudia Costin

Cláudio de Moura Castro

Cláudio Luiz da Silva Haddad

Marcelo Luis Orticelli

Marcos de Barros Lisboa

Ricardo Paes de Barros

Rodolfo Villela Marino

DIRETORIA

Cláudio José Coutinho Arromatte

Jânio Gomes

Leila Cristiane Barboza Braga de Melo

Marcelo Luis Orticelli

Moises João do Nascimento

Paulo Sérgio Miron

Valéria Aparecida Marretto

EQUIPE TÉCNICA

SUPERINTENDENTE EXECUTIVO

Ricardo Henriques

GERENTES

João Marcelo A. S. Borges

Maria Julia Azevedo Gouveia

Mirela de Carvalho

Núbia Freitas Silva Souza

Tiago Borba

EQUIPE DE PRODUÇÃO

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO DA GESTÃO

Daniela Arai

EQUIPE

Fernanda Arantes e Silva

Letícia Daidone

Lisandra Saltini

Jornada de fortalecimento das aprendizagens no contexto do Novo Ensino Médio

Já tem algum tempo que as comunidades escolares buscam se adaptar a novas formas de ser e fazer escola, de ensinar e aprender. Com a homologação da BNCC (BNCC) em 2018[1], a disseminação de novas tecnologias e a divulgação de diferentes metodologias ativas, estratégias vêm sendo elaboradas para diminuir as desigualdades educacionais, garantir acesso e permanência de crianças, adolescentes e jovens na escola e assegurar os seus direitos de aprendizagem. Tudo isso a partir do compromisso com a educação integral e o foco no desenvolvimento de competências.

Porém, com os impactos trazidos pela pandemia de Covid-19, os desafios se intensificaram. Estudos mostram que, em novembro de 2020, cerca de 5 milhões de estudantes brasileiros não tiveram acesso à educação no Brasil[2]. O fechamento das escolas e a adoção de modelos de ensino remoto - com aulas gravadas ou ao vivo - que demandam equipamentos e internet, afastou muitos estudantes do cotidiano escolar, seja por falta de recursos ou dificuldade de engajamento com esses novos formatos. Estudos[3] e avaliações locais - como as do estado de São Paulo (Saresp 2021) - indicam que evasão e defasagem de aprendizagem se aprofundaram em níveis preocupantes. Pesquisa da UNESCO (2021)[4] indica que houve perdas de aprendizagem e risco de abandono escolar em muitos países, em especial naqueles nos quais há grande número de famílias em situação de pobreza e extrema pobreza como é o caso do Brasil.

Se muitas foram as dificuldades impostas à educação nos anos de 2020 e 2021, muitas também foram as reflexões suscitadas por esse período e ações colocadas em prática na educação, Brasil afora. Em um curto espaço de tempo, redes de ensino concretizaram oportunidades de colaboração entre si,com outras instâncias da gestão pública e da sociedade civil; práticas didáticas foram revisitadas, revitalizadas e criadas; estudantes tiveram espaço para fortalecer sua autonomia, assumindo maior protagonismo e ampliando suas habilidades de autogestão; ferramentas tecnológicas foram mais utilizadas; e as famílias se aproximaram da comunidade escolar. Neste contexto, destaca-se o compromisso dos educadores com os estudantes, assim como sua criatividade e competência na busca por soluções para assegurar a formação de todos.

1. Para ler o documento completo, acesse https://bityli.com/mecbncc. Complementar à BNCC, indicamos ainda a leitura da Lei nº 13.415/2017, disponível em: https://bityli.com/13415, que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na estrutura do ensino médio, e a Portaria nº 649, disponível em: https://bityli.com/649, que estabeleceu o Programa de Apoio ao Novo Ensino Médio. Além disso, recomendamos a leitura do referencial curricular do Ensino Médio do estado de sua atuação.

2. Cenário da Exclusão Escolar no Brasil. Estudo realizado pela Unicef, em parceria com o Cenpec. https://bityli.com/unicef. Acesso em: 22/02/2022.

3. Veja mais em Evasão escolar e o abandono: um guia para entender esses conceitos, disponível em https://bityli.com/iuobservatorio. Acesso em: 22/03/2022.

4. Para ler a pesquisa completa, acesse: https://bityli.com/dadosunesco. Acesso em: 22/03/2022.

Para enfrentar esse cenário, há também uma mobilização internacional em torno da recomposição das aprendizagens, isto é, um conjunto de ações que envolve a busca ativa para trazer os estudantes para a escola e um conjunto de ações pedagógicas, sistemicamente organizadas, para diminuir os impactos que o contexto da pandemia trouxe para a aprendizagem.

Vale à pena observar que, neste momento atípico enfrentado pelo cenário educacional, não estamos falando em recuperação das aprendizagens, ou seja, no processo em que alguns estudantes têm a oportunidade de retomar o que foi ensinado durante a sua trajetória escolar regular, presencial, e que não foram plenamente desenvolvidos conforme o esperado. Estamos falando de **recompor aprendizagens, ou seja, de garantir aprendizagens essenciais para todos os estudantes**, sem as quais a continuidade dos seus estudos atuais e futuros pode ficar muito comprometida.

É importante ter em vista que recompor as aprendizagens é um compromisso a ser assumido coletivamente pelas redes, escolas e professores, pois envolve planejamento conjunto e uma série de ações interconectadas. Em primeiro lugar, é preciso analisar as prioridades curriculares, isto é: entre todas as aprendizagens essenciais, quais são aquelas mais essenciais neste momento? Quanto mais foco nas aprendizagens, mais rapidamente será possível alcançar os objetivos esperados - e isso deve ser feito com olhos no passado, no presente e no futuro.

É fundamental que as redes e os educadores, junto às suas escolas tomem uma primeira decisão: **definir as aprendizagens prioritárias ou focais** que serão garantidas a todos os estudantes. Isso implica a revisão dos currículos pensados da seguinte maneira: "o que é estruturante que os estudantes aprendam este ano para que, nos anos seguintes, possam estar mais próximos das aprendizagens esperadas para cada série do Ensino Médio?". Tendo em vista que os estudantes permaneceram cerca de dois anos em aulas remotas, recomenda-se analisar as habilidades focais do 8º ano e do 9º ano que precisam ser aprendidas para garantir as aprendizagens focais na série em que os estudantes estão em 2022[1].

A priorização curricular, então, mapeia as aprendizagens essenciais para o desenvolvimento dos estudantes e são capazes de colaborar para a construção de conhecimentos e competências importantes para o avanço ou conclusão dos estudos.

Este exercício deve estar associado aos processos de **avaliação diagnóstica,** a qual tem por objetivo saber se os estudantes estão próximos ou distantes das aprendizagens que foram consideradas essenciais. É importante que esse diagnóstico seja feito ainda no primeiro mês de aulas ou a cada novo ciclo para que os planejamentos das escolas levem em consideração o estágio dos estudantes, de modo a planejar e definir os focos mais urgentes de ação.

1. A série Mapas de Foco do Instituto Reúna (Mapas de Foco, Mapas de Foco nas Redes e Mapas de Foco na Escola) pode apoiar esse processo, ainda que esteja organizada para o 1º ao 9º ano, pois os critérios e processos sugeridos valem também para o Ensino Médio. Disponível em: https://bityli.com/mapasdefoco (acesso em 22/03/2022).

O passo seguinte à priorização curricular, é **planejar tempo para a formação dos professores,** com um plano de trabalho definido, para que possa ser acompanhado e avaliado. Os professores precisam realizar intervenções para garantir que os planos de aprendizagem traçados para os alunos se efetivem, para acompanhá-los sem perder de vista as necessidades individuais e socializar os resultados alcançados, oferecendo apoio constante para que sigam aprendendo. Para isso, a **avaliação processual e formativa**[1] é muito relevante.

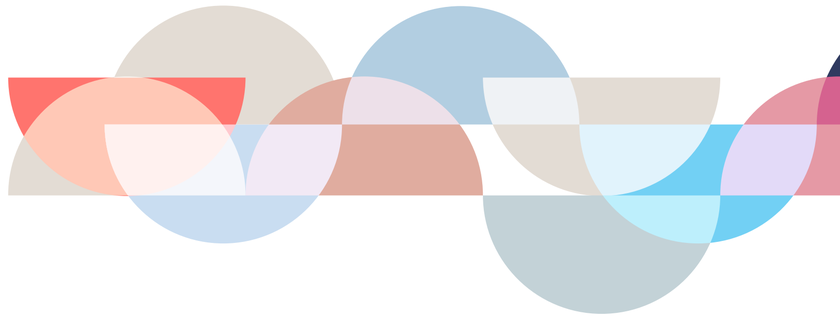
A avaliação apoia o trabalho orientado para a recomposição das aprendizagens e serve de **bússola para o trabalho do professor:** mostram o ponto de partida em que os estudantes se encontram e a forma como eles estão compreendendo as atividades educativas, oferecem insumos para que sejam encontradas estratégias de correção de rota que melhor se adequem às necessidades dos estudantes e garantem que as aprendizagens, de fato, ocorram.

Vale lembrar que as avaliações formativas são importantes não só no contexto da recomposição das aprendizagens, mas também no contexto do Ensino Médio, visto que fazem parte de um conjunto de práticas voltadas à transformação dessa etapa de ensino, qualificando as práticas pedagógicas dos educadores e o desenvolvimento e engajamento dos estudantes.

A gestão, principalmente na figura do **diretor,** tem um papel essencial na organização dos espaços e na garantia dos tempos adequados para formações, atividades e avaliações, para que esse processo de recomposição das aprendizagens aconteça. É por meio de um trabalho planejado, direcionado e com liderança definida que as ações podem ser mais efetivas. Já a **coordenação pedagógica** é responsável pela formação e acompanhamento pedagógico dos professores, garantindo que essa etapa seja realizada com qualidade.

Um ponto que ainda merece destaque são as muitas ações que podem ser planejadas pela equipe da escola: ampliação dos tempos de aula com uso ou não de tecnologia, momentos de imersão específicos para atender estudantes com necessidades comuns, aulas de reforço com estagiários ou professores especialmente contratados para ajudar a resolver questões como dificuldades com leitura e escrita. No entanto, **a liderança desse processo de recomposição de aprendizagem na sala de aula é de quem atua com os estudantes, isto é, as professoras e professores.**

1. Avaliação processual e formativa é aquela que acompanha, de forma contínua, o processo de aprendizagem e o desenvolvimento dos estudantes. Nela, professores e gestores lançam mão de diferentes instrumentos avaliativos, cujos resultados servem de insumo para o (re)planejamento e a tomada de decisão das equipes escolares.



Por isso, é importante garantir que, a partir da formação, sejam feitas boas escolhas didáticas: uso de materiais adequados que garantam aulas organizadas, uso de materiais didáticos selecionados em função das expectativas de aprendizagem, e aplicação de metodologias ativas voltadas ao desenvolvimento integral dos estudantes.

Os **familiares ou responsáveis pelos estudantes,** quando envolvidos e comunicados sobre as estratégias adotadas pela escola, apoiam e mobilizam os alunos para estar em sala de aula e cumprir suas tarefas e compromissos. No Ensino Médio, em especial, um fator de relevância para a recomposição das aprendizagens e permanência na escola é o **projeto de vida,** uma maneira de apoiar o estudante a pensar sua trajetória presente e futura, a vislumbrar formas de avançar por meio da educação e entender como ele é também responsável pela recomposição de suas aprendizagens.

Tudo isso ganha ainda mais potência quando se tem um olhar permanente de rede, capaz não apenas de apoiar as priorizações e os planos de ação, mas essencialmente de acompanhar as execuções, apoiar as equipes gestoras das escolas e disseminar as práticas de recomposição de maneira ampla e coordenada. Esse papel deve ser assumido pelas **Secretarias de Educação** em conjunto com suas regionais, quando houver.

Vale reforçar que a recomposição é um trabalho que se faz urgente e necessário no cenário atual e envolve todos os atores escolares, para que os estudantes tenham garantido o seu pleno direito ao acesso à educação e, por consequência, a oportunidade de se desenvolverem integralmente na escola e muito além dela.

Para seguir se aprofundando nas estratégias que apoiam o trabalho voltado para recompor aprendizagens, acesse o documento: Percursos formativos e atividades para apoiar o Fortalecimento das Aprendizagens na escola e na rede, disponível em https://bityli.com/material-apoio.

O material, voltado para professores e gestores, contém sugestões de atividades, e indicações de formações da Plataforma Nosso Ensino Médio, que podem ser realizadas em diferentes momentos do ano. Acesse em https://bityli.com/nossoem.

Boas-vindas

INICIATIVA FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM

Para contribuir com todo esse movimento o Reúna e o Instituto Unibanco são parceiros no desenvolvimento de ações para o FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM, um convite para todas as redes de ensino do país. Nosso objetivo principal é apoiar os educadores em três movimentos: no mapeamento das lacunas, ou das aprendizagens que não ocorreram, dos jovens matriculados no Ensino Médio, na recomposição das mesmas e colocar o estudante como centro do processo de ensino aprendizagem.

Conheça os institutos envolvidos na iniciativa:

INSTITUTO REÚNA

A organização zela pela qualidade técnico-pedagógica da implementação da BNCC e das inovações do Ensino Médio. Desde 2019, tem como foco criar referências nacionais para a construção de um sistema educacional coerente. Seu propósito é construir bases consistentes para aprendizagens efetivas, mobilizadoras e para todos. Com uma abordagem que procura entender e antecipar desde as necessidades específicas das redes educacionais até as questões mais amplas dos sistemas de educação, o Instituto produz ferramentas que se adequam aos diferentes contextos e inspirem crianças e jovens.

INSTITUTO UNIBANCO

Desde 1982, o Instituto sem fins lucrativos apoia e desenvolve soluções para a melhoria da qualidade da educação pública no Ensino Médio. Seu objetivo é contribuir para a permanência dos estudantes na escola, melhoria da aprendizagem e redução das desigualdades educacionais. Além de resultados sustentáveis de aprendizagem, trabalha pela equidade no ensino, tanto entre as escolas quanto no interior de cada uma delas, com base em quatro valores fundamentais: conectar ideias, acelerar transformações, valorizar a diversidade e ser fundamentado em evidências.

Os recursos do FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM sugerem caminhos possíveis para que diretores escolares, coordenadores pedagógicos e professores continuem apoiando os estudantes a permanecerem ou retomarem suas jornadas escolares e possam se reconectar com suas trajetórias de aprendizagem. Isso se dá pela disponibilização de materiais, em especial sequências didáticas para a sala de aula de Língua Portuguesa e Matemática, bem como pautas para apoiar as equipes das secretarias de educação em atividades de formação continuada docente.

Ao falarmos em recomposição das aprendizagens, nos remetemos a uma reorganização dos currículos, das habilidades, conteúdos e práticas didáticas, para que, frente a tantos desafios, gestores, professores e estudantes, consigam mirar no que é prioritário naquele momento. A recomposição das aprendizagens é um processo que envolve diferentes ações, e não se encerra em apenas uma atividade ou momento do ano letivo. Para que a recomposição aconteça, o currículo priorizado deve substituir, temporariamente, o currículo em curso, de modo que os estudantes tenham tempo de desenvolver aprendizagens essenciais e alcancem uma base sólida capaz de permitir que sigam avançando nos estudos e/ou adentrem o mundo do trabalho nas etapas seguintes de escolaridade.

Os recursos do FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM indicam o uso de métodos ativos de aprendizagem, como a aprendizagem baseada em projetos e problemas, a sala de aula invertida, entre outros, colocam o estudante como centro do processo e caminham na direção de uma maior personalização do ensino, de forma que o professor consegue partir das demandas, desafios e avanços da turma em questão para fazer seu planejamento. Além disso, incentivam a aprendizagem colaborativa entre os estudantes. Essas ações se relacionam diretamente ao desenvolvimento das competências gerais e específicas das áreas, como previsto na BNCC.

E, como não poderia deixar de ser quando falamos em Novo Ensino Médio, a iniciativa FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM tem relação com os projetos de vida dos estudantes. Projeto de vida, em um sentido amplo, tem a finalidade de apoiar os estudantes a avaliar as trilhas de aprendizagem que eles queiram seguir ao longo e depois da sua trajetória escolar, desenvolver valores e competências que os preparem para essas escolhas, e também na construção de caminhos promissores para o seu desenvolvimento em todas as dimensões. É um exercício constante de tornar visível, na linha do tempo de cada um, descobertas, valores, escolhas, perdas e também desafios futuros, aumentando nossa percepção, aprendendo com os erros e projetando novos cenários de curto e médio prazo.

Na jornada do Fortalecimento da aprendizagem há uma intencionalidade de mobilização dos estudantes pela aprendizagem, fazendo com que eles vejam a importância da socialização dos avanços dos seus resultados e da adequação do nível de complexidade das propostas para que os estudantes se sintam envolvidos, capazes e aprendendo.

A escolha é por trabalhar com comunicação, autoconhecimento e autoconfiança (significativas para a construção da identidade dos jovens) além de persistência e capacidade de enfrentar e buscar soluções para as mais diversas situações-problema (mais voltadas para a continuidade dos estudos e para inserção no mundo do trabalho). As propostas das sequências didáticas são o veículo para esta mobilização.

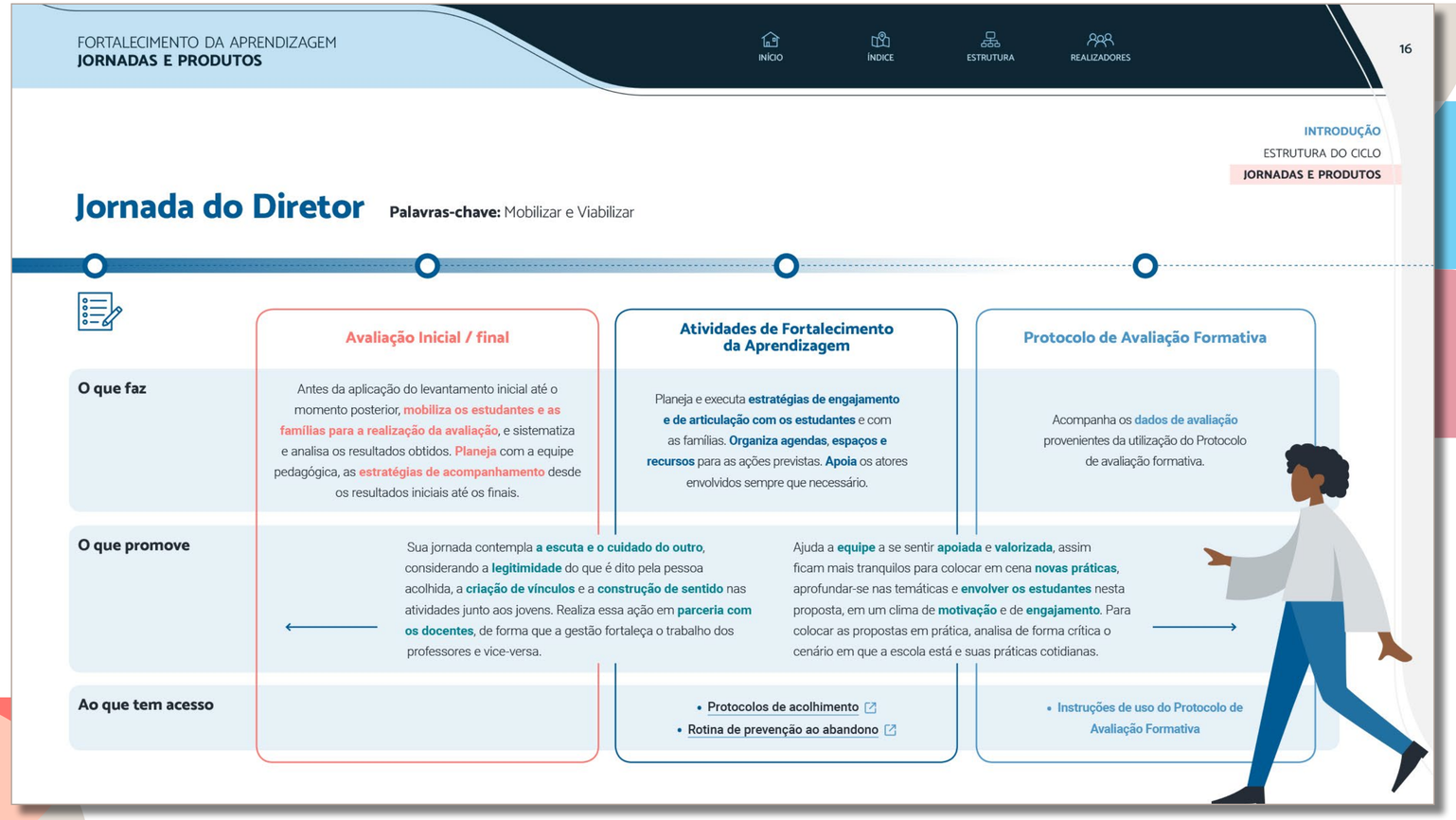
A jornada de Fortalecimento das Aprendizagens, com foco na recomposição, é feita por meio de algumas estratégias:

- Acolhimentos dos estudantes – Para que possam sentir que faz sentido estar na escola, engajando-se e sentindo-se corresponsáveis pelo processo de aprendizagem.
- Adaptação do currículo – Com a priorização de habilidades essenciais a serem desenvolvidas pelos estudantes.
- Adaptação de práticas pedagógicas – Visando a mobilização, engajamento e desenvolvimento dos jovens.
- Avaliação inicial – Ao iniciar o ciclo de aprendizagem com os estudantes, para mapear as lacunas de aprendizagem.
- Avaliação formativa – Durante todo o processo e partindo dos resultados das avaliações para elaborar o planejamento docente e realizar intervenções pedagógicas.
- Material didático apropriado – Elaborado especificamente no contexto da iniciativa, pensando nas realidades brasileiras e respeitando a autonomia de cada professor.
- Formação – Que prepara professores e gestores para o acolhimento dos estudantes e para a utilização dos materiais de recomposição das aprendizagens.

O **acolhimento dos estudantes** deve ser um dos primeiros passos e também um movimento contínuo na recomposição das aprendizagens. Do ponto de vista das sequências didáticas, a sugestão é criar um ciclo de acolhimento e melhoria, propondo ações contínuas e interligadas. Atividades de acolhimento socioemocional estão presentes nas sequências didáticas iniciais e acompanham toda a jornada do estudante. O objetivo é desenvolver o autoconhecimento, a autoconfiança e a persistência, além de aumentar sua autoestima em relação à capacidade de aprender. É possível encontrar ainda atividades que levantam questões em debate na contemporaneidade, mundo do trabalho e tecnologia, a fim de contribuir para a formação integral dos estudantes e se aproximar do contexto e das realidades juvenis.

Para um desafio como este, o trabalho colaborativo é essencial, com cada ator da comunidade escolar desempenhando um papel significativo:

- Diretor/a escolar – É o agente mobilizador do processo, aquele que viabiliza as ações de recomposição da aprendizagem na escola. Sua função é planejar e executar estratégias de engajamento e de articulação com os estudantes e com as famílias, organizando agendas, espaços e recursos para as ações previstas e apoiar os atores envolvidos sempre que necessário.



- Coordenador/a pedagógico da escola ou pedagogo/a – É a pessoa responsável por formar os professores em serviço, orientando, acompanhando e apoiando o grupo de docentes.

FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM
JORNADAS E PRODUTOS

INÍCIO ÍNDICE ESTRUTURA REALIZADORES

15

INTRODUÇÃO
ESTRUTURA DO CICLO
JORNADAS E PRODUTOS

Jornada do coordenador pedagógico / formador

Palavras-chave: Formar e Acompanhar

	Avaliação Inicial / final	Atividades de Fortalecimento da Aprendizagem	Protocolo de Avaliação Formativa
O que faz	**Forma os professores** para a aplicação das provas de avaliação inicial e final. Apoia a **análise e a discussão dos resultados**, e colabora na definição de **ações para a aprendizagem dos jovens**.	**Forma os professores em serviço**, orientando, **acompanhando e apoiando o grupo de docentes**. Para tal, compreende como o professor se apropria, planeja e põe em prática as Sequências Didáticas que contemplam **o acolhimento do estudante** e o fortalecimento das aprendizagens em Língua Portuguesa e em Matemática.	**Forma os professores** para o **acompanhamento** das aprendizagens dos estudantes e **incentiva** o uso do protocolo.
O que promove	Coordenadores pedagógicos juntamente com os Diretores apoiam nas ações de **busca e acolhimento dos jovens**. Assim, quando o docente entra em ação, ele **amplia** e **fortalece** o **acolhimento** por meio do trabalho realizado em sala.	Apoia e forma os professores para realizarem o **acolhimento socioemocional dos jovens**, usarem **novas metodologias de ensino**, em classe, compreenderem a **priorização curricular** e prepararem, as devolutivas de avaliação dos estudantes, **considerando o contexto em que a escola está inserida** e as práticas que formam seu cotidiano.	Realiza o **acompanhamento do trabalho** do professor no dia a dia com o objetivo de traçar, conjuntamente, as **estratégias de intervenção pedagógica** e **planejamento** das aulas e atividades.
Ao que tem acesso		• **Pautas Formativas** de Matemática 1, 2, 3 e 4 • **Pautas Formativas** de Língua Portuguesa 1, 2, 3 e 4	• **Instruções de uso do Protocolo de Avaliação Formativa**

- Professor/a – É quem coloca as ações e atividades em prática na sala de aula, junto aos estudantes. Sua função é participar da formação continuada, de olho no currículo a ser usado no desenvolvimento de habilidades essenciais, planejar e executar sequências didáticas de forma adequada. É importante também que realize as atividades de acolhimento, aplique as avaliações formativas e oriente os estudantes na realização dos planos de estudos individuais em momentos de autogestão.

FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM
JORNADAS E PRODUTOS

INÍCIO ÍNDICE ESTRUTURA REALIZADORES

14

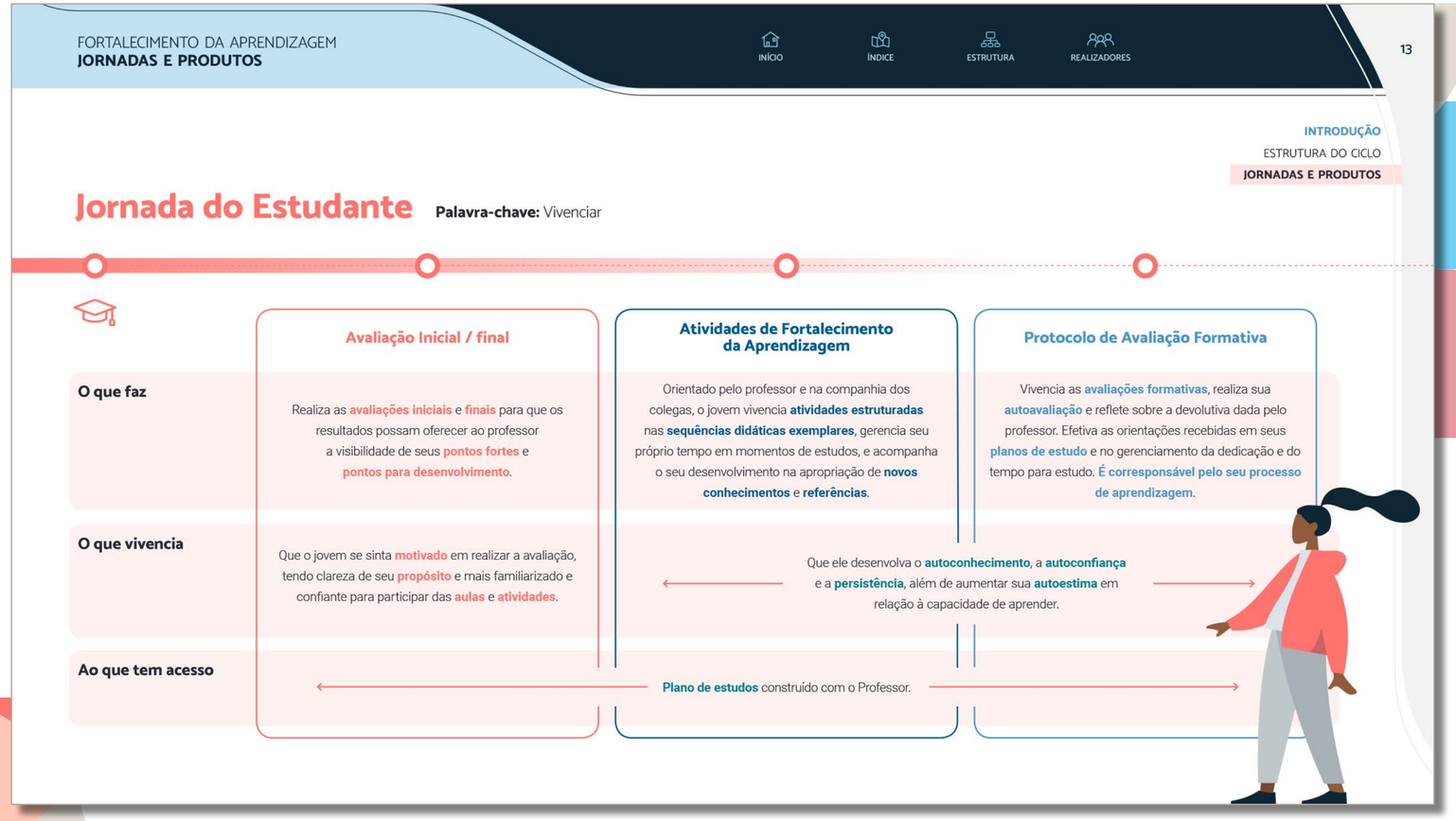
INTRODUÇÃO
ESTRUTURA DO CICLO
JORNADAS E PRODUTOS

Jornada do Professor

Palavras-chave: Promover, planejar e acompanhar

	Avaliação Inicial / final	Atividades de Fortalecimento da Aprendizagem	Protocolo de Avaliação Formativa
O que faz	Ao professor, cabe aplicar as **avaliações inicial** e **final**. A primeira delas é proposta na primeira Sequência Didática e, a segunda, prevista para o fim da terceira Sequência Didática. Ele também realiza a **análise dos resultados** e retoma as habilidades priorizadas.	Participa da **formação continuada** para apropriação das Sequências Didáticas. **Planeja e executa as aulas** com apoio das Sequências Didáticas. Complementa as Sequências com **planos de estudos individualizados** para momentos de autogestão dos estudantes e os acompanha. **Acompanha, analisa e compartilha** com a **gestão da escola** o **percurso de aprendizagem** de cada jovem.	**Identifica** momentos de avaliação conforme as situações de aula. **Planeja e realiza as avaliações**. Organiza os **planos de estudo** dos jovens com base nas **autoavaliações** e nas **devolutivas** das atividades de avaliação realizadas.
O que promove	O objetivo é que o professor consiga **diagnosticar o estágio dos estudantes** e **orientar melhor** a proposição de planos de estudos específicos e individualizados para eles.	A jornada docente começa no momento da formação, junto com a coordenação pedagógica, momento em que **entende a proposta e se apropria do conjunto de ferramentas**. Ao longo de toda a sua jornada, o professor realiza com os estudantes atividades de **acolhimento socioemocional**.	As devolutivas do docente, após as avaliações formativas, **ajudam os estudantes a realizarem a autoavaliação**, a organizar melhor a **gestão do tempo** e a dedicação aos **estudos**.
Materiais que terá acesso	• **Anexos do Professor** – Avaliação Inicial Matemática • **Anexos do Professor** – **Avaliação Inicial Língua Portuguesa** • **Plataforma de apoio á Aprendizagem**	• **Sequências Didáticas** de Matemática 1, 2 e 3 • **Sequências Didáticas** de **Língua Portuguesa** 1, 2 e 3 • **Orientações para elaboração de planos de estudos em momentos de autogestão do estudante**	• **Protocolo de Avaliação Formativa**

- Estudante – Deve ser o protagonista das ações, sendo corresponsável por sua aprendizagem. A jornada do estudante começa com uma avaliação inicial para identificar o ponto de partida do aprendizado, permitindo a análise de seus pontos fortes e de seus pontos de desenvolvimento. Depois disso, o estudante vai vivenciar as sequências didáticas e acompanhar seu próprio desenvolvimento pelas atividades de avaliação formativa que se encontram em cada sequência.



MATERIAIS PARA O FORTALECIMENTO DAS APRENDIZAGENS

Agora que você já sabe o que é a recomposição das aprendizagens, porque ela é importante no contexto do Novo Ensino Médio e como fazer o acolhimento dos estudantes, apresentamos materiais que poderão apoiar professores e equipe pedagógica a potencializar essa jornada.

Os materiais para o FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM foram elaborados com foco na recomposição das aprendizagens e tendo em vista as diferentes realidades brasileiras. O ponto de partida são habilidades da BNCC, presentes nos currículos referenciais do Ensino Médio, consideradas essenciais, selecionadas levando em conta a urgência no fortalecimento da relação entre os estudantes e o conhecimento e o tempo que se tem, e que deve ser aproveitado ao máximo, para uma ação efetiva de aprendizagem.

Para essa priorização curricular, foram consideradas três dimensões e, com base em cada uma delas, os seguintes critérios:

O engajamento dos estudantes e as exigências da vida em sociedade

- Atividades mais motivadoras, que permitam protagonismo dos estudantes.
- Trabalho transversal, com abordagem socioemocional, inclusiva e socialmente diversa.
- Favorecimento à inclusão de temas do mundo do trabalho, disparadores de saberes que permitam maior propriedade em processos seletivos.
- Possibilidade de desenvolvimento de saberes tecnológicos e digitais.

Os componentes curriculares de Língua Portuguesa e Matemática

- Abrangência de diferentes campos de atuação social da Língua Portuguesa e diferentes unidades temáticas de Matemática.
- Favorecimento de relações entre conceitos, processos e representações.
- Possibilidade de retomada de conhecimentos já adquiridos, para que o estudante avance em sua aprendizagem.
- Desenvolvimento das competências gerais e específicas da área ou do componente, previstas na BNCC e nos referenciais curriculares.

As demandas das avaliações nacionais

- Compatibilidade com descritores com baixo resultado nas avaliações SAEB para a 3ª série do Ensino Médio de 2019,
- As avaliações realizadas pelos estados em 2021 visando identificar o estado da aprendizagem de seus estudantes, em especial aquelas realizadas com as turmas de 9o ano e 3a série do Ensino Médio.
- Compatibilidade com descritores com baixo resultado nas avaliações diagnósticas realizadas pela rede.
- Compatibilidade com conteúdos mais cobrados no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

Articulando os critérios dos três grupos acima, a expectativa é promover o desenvolvimento integral dos estudantes, permitindo que continuem estudando, trilhem um percurso de aprendizagem mais efetivo e adentrem no mundo do trabalho sentindo-se mais preparados.

MATERIAIS PARA O PROFESSOR

Para apoiar os docentes, as habilidades selecionadas foram distribuídas em três sequências didáticas exemplares para Língua Portuguesa e três para Matemática, sendo a primeira de cada componente sempre associada a conteúdos e contextos em que os jovens possuem algum conhecimento e propõem fazer retomadas do conhecimento para que os jovens reconheçam o que sabem e se sintam motivados para continuar aprendendo. Com isso, a ideia é justamente engajá-los na aprendizagem. Já as demais sequências têm como foco novos conhecimentos e habilidades nas quais os estudantes demonstram mais dificuldades tendo como referências as lacunas identificadas nas avaliações diagnósticas, sempre considerando o desenvolvimento de habilidades prioritárias para aprender mais e a preparação para desafios futuros na continuidade dos estudos ou no mundo do trabalho.

As propostas apresentadas como exemplares possuem uma lógica em seu desenvolvimento e apresentam atividades com resultados comprovados de aprendizagem. Do ponto de vista das sequências didáticas, a sugestão é criar um ciclo de acolhimento e melhoria, propondo ações contínuas e interligadas. No entanto, elas são sugestões, modelos que podem ser adaptados para o trabalho com os alunos e integradas a outras habilidades, respeitando as necessidades específicas identificadas em cada turma e a cultura de cada unidade escolar. O tempo de duração sugerido para cada proposta tem em média 16 horas/aula.

Além das sequências didáticas apresentadas, faz parte da iniciativa a Caixa de Ferramentas do Professor, com os seguintes materiais:

- Uma sugestão de avaliação inicial e outra de avaliação final, para acompanhar os jovens durante o processo.
- Os documentos Orientações ao professor e Propostas de intervenção na forma de orientações de estudos, para elaboração e execução de planos de estudos com sugestões de itens, vídeos e questões que podem compor tarefas estabelecidas pelo professor, para auxiliar os alunos em momentos de estudo individual e de autogestão.
- O Protocolo de Avaliação Formativa, documento com recursos estruturados para o acompanhamento e o registro sobre o processo de aprendizagem, além de orientações para compartilhar essas informações com os jovens e com a gestão da escola.
- Sugestões e estratégias para o desenvolvimento das aulas no contexto híbrido. Acesse o documento Como tornar as suas estratégias de ensino e aprendizagem híbridos com dicas de mediação.

MATERIAIS PARA A EQUIPE PEDAGÓGICA

Para apoiar o trabalho da equipe pedagógica, a Caixa de Ferramentas do Formador apresenta orientações para a realização dos momentos formativos, na forma de pautas, textos de apoio, conteúdos anexos e apresentações para apoiar os momentos formativos. As pautas formativas contemplam oito horas de formação para cada um dos componentes (Língua Portuguesa e Matemática) e têm como objetivo facilitar a compreensão das sequências didáticas, da metodologia proposta para o desenvolvimento das habilidades essenciais. As pautas formativas têm, ainda, as Instruções de uso do Protocolo de Avaliação Formativa, que auxilia a compreensão do Protocolo de Avaliação Formativa (presente na Caixa de Ferramenta do Professor).

Acesse os materiais do Volume 1 aqui:
https://www.institutoreuna.org.br/ensino-medio/content/Fortalecimento-da-Aprendizagem

CONECTANDO SEQUÊNCIAS

VOLUME 1 E VOLUME 2 DO FORTALECIMENTO DA APRENDIZAGEM

O Volume 1 do Fortalecimento da Aprendizagem tem os mesmos princípios de organização do Volume 2, mas foi feito para **atender, em um primeiro momento, aos estudantes da 3ª série do Ensino Médio,** que estavam finalizando a educação básica após um longo período de interrupção de aulas, e aos quais se desejava garantir aprendizagens essenciais para que eles se sentissem seguros para participar de processos seletivos para o ensino superior, além de garantir conhecimentos que permitissem seguir no mundo do trabalho.

Já o Volume 2 amplia esse olhar para apoiar a recomposição de aprendizagens aos estudantes que iniciam o percurso pelo Novo Ensino Médio.

Por isso, leva em conta os Mapas de Foco da BNCC do Instituto Reúna para 8ºs e 9ºs anos, bem como o Referencial para Seriação das Matrizes Curriculares de Língua Portuguesa e Matemática no Ensino Médio e as Matrizes Curriculares da Fundação Roberto Marinho.

Todos esses documentos se relacionam à BNCC (2018) e, por consequência, aos currículos referenciais dos estados. Por isso, favorecem a organização temporária das aprendizagens de tal forma a garantir o *continuum* curricular e as aprendizagens essenciais que não foram alcançadas no final do ensino fundamental, e que podem comprometer o desenvolvimento dos estudantes no ensino médio.

Apesar desses focos específicos, os dois volumes são complementares e podem ser utilizados em conjunto a depender do diagnóstico da aprendizagem dos estudantes, uma vez que, se constituem por atividades exemplares, para apoiar os ajustes que se fizerem necessários nas três séries. As atividades foram pensadas para os diferentes momentos que eles irão se deparar no seu percurso formativo, como reflexões que os apoiam a pensar na sua trajetória ao longo das séries e nos caminhos que irão seguir após a conclusão dos estudos escolares.

Nossa recomendação é para que os professores de Língua Portuguesa e Matemática das primeiras séries do ensino médio **iniciem pelo Volume 2 e que, conforme indicação, utilizem complementarmente o** Volume 1. Os recursos formativos disponibilizados foram referenciados nas propostas dos dois Volumes. Materiais como livros didáticos, projetos, planos de aula, entre outros, são importantes para o desenvolvimento das propostas como complementares ao que as Sequências Didáticas propõem.

VOLUME 2 DO FORTALECIMENTO DAS APRENDIZAGENS

Como o Volume 2 foi pensado para apoiar a recomposição das aprendizagens no contexto da implementação da nova arquitetura do Ensino Médio, em especial para apoiar a Formação Geral Básica segundo os pressupostos da BNCC, são destaques na proposta:

- Consolidação, aprofundamento e ampliação das aprendizagens iniciadas no ensino fundamental, que marca o pressuposto de progressão das aprendizagens na educação básica previsto na BNCC. Isto significa que as sequências orientam recompor as aprendizagens não realizadas anteriormente pelos estudantes, bem como desenvolver as essenciais para a série em que está.

- A avaliação processual em compromisso com a abordagem formativa ganha mais evidência, com orientações de diferentes momentos, instrumentos e estratégias para observar as evidências de aprendizagem e nela intervir.

- O compromisso com o desenvolvimento integral dos/das jovens fica mais evidente, com proposição de situações de aprendizagem que mobilizam o desenvolvimento de aspectos das competências gerais da BNCC simultaneamente ao desenvolvimento de competências e habilidades específicas dos componentes, apoiando o professor a perceber como os desafios propostos e os caminhos metodológicos escolhidos concorrem para isso.

- O exercício de priorização curricular é apresentado de forma modelar e formativa, e abre caminhos para o professor estabelecer relações com as propostas do Volume 1 e com outras que seja do seu repertório, evitando-se a ideia de seriação das aprendizagens, ao mesmo passo em que reforça a lógica da progressão das aprendizagens na medida em que as atividades vão se complexificando.

Todo o material é flexível e adaptável, sendo possível integrá-los com outros recursos e estratégias didáticas já utilizadas pelos professores.

Bom trabalho!

Introdução

Olá, professor/a!

Seja bem-vindo/a a 3ª sequência didática de Matemática do Ensino Médio.

Assim como nas duas sequências anteriores, no início desta encontra-se um quadro com as habilidades priorizadas e os descritores do SAEB relacionados às atividades sugeridas. Essas informações podem auxiliar no acompanhamento das aprendizagens dos estudantes ao longo do desenvolvimento de cada atividade.

Os objetivos aqui continuam sendo a retomada/desenvolvimento de habilidades propostas para os anos finais do Ensino Fundamental ainda não consolidadas, e o desenvolvimento das habilidades prioritárias selecionadas dentre aquelas propostas na BNCC para o Ensino Médio.

Mantendo a concepção de matemática como uma forma de pensar, para além de um conjunto de conceitos e procedimentos, e o compromisso com a formação integral do jovem protagonista, a ideia é manter o estudante cognitivamente ativo durante todo o percurso, além de promover a oportunidade de desenvolver competências cognitivas e socioemocionais.

Cabe ao/à professor/a conduzir todo o processo, acompanhar os estudantes em sua trajetória, auxiliá-los na organização dos estudos, garantir as sistematizações das aprendizagens e ajudá-los a continuar motivados em suas trajetórias escolares.

O percurso inicia-se com atividades que ampliam o conhecimento numérico dos estudantes e retomam a fatoração de números como conhecimento essencial para o estudo da fatoração de expressões algébricas, que é apoiado no conceito de área. Em seguida, realiza-se o estudo de diferentes formas para resolver equações do 2º grau, que são conhecimentos prévios necessários para os temas que serão contemplados nas atividades seguintes desta sequência. Retomando e ampliando o trabalho com o pensamento algébrico, a terceira atividade da sequência desenvolve o estudo das funções do 2º grau com base na identificação de padrões e na análise de regularidades. O teorema de Pitágoras e as relações trigonométricas no triângulo retângulo são contempladas na terceira atividade da sequência. Durante todo o percurso, a história da matemática também é explorada como forma de despertar a curiosidade e o interesse do estudante.

A partir desses temas, as propostas têm como foco promover a motivação, a iniciativa, a persistência, a autoconfiança, o planejamento, a autonomia e o protagonismo, habilidades importantes para a aprendizagem de matemática e para a formação integral do jovem.

Bom trabalho!

No quadro a seguir, além dos descritores do SAEB, apresentamos também as habilidades priorizadas e as competências específicas da área propostas pela BNCC e que serão contempladas nas atividades. É importante observar que, dentre elas, existem aquelas indicadas para o Ensino Fundamental e outras para o Ensino Médio. A ideia é retomar habilidades estruturantes propostas para anos anteriores, mas que talvez ainda não tenham sido desenvolvidas, para depois avançar para o que precisa ser ensinado na série atual. Esta é a ideia da recomposição da aprendizagem e do continuum curricular: não paramos tudo para ensinar todas as habilidades anteriores, mas vamos desenvolvendo o que é essencial para o estudante seguir aprendendo, avançando com mais conhecimento neste e nos próximos anos.

Tempo sugerido: 42 horas/aula

TEMA 1: AMPLIANDO O UNIVERSO NUMÉRICO E FATORANDO EXPRESSÕES ALGÉBRICAS			
Competências específicas da área - propostas para o Ensino Médio	**Habilidades focais do EF anos finais que são conhecimentos prévios**	**Descrição das habilidades focais de matemática do EM**	**Descritores SAEB**
	EF09MA02 Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica. EF09MA09 Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.		• Conhecer e aplicar as propriedades das operações com radicais. • Fatorar expressões de 2º grau com uma variável.

TEMA 2: RESOLVENDO EQUAÇÕES DO 2º GRAU			
Competências específicas da área - propostas para o Ensino Médio	**Habilidades focais do EF anos finais que são conhecimentos prévios**	**Descrição das habilidades focais de matemática do EM**	**Descritores SAEB**
2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.	EF09MA09 Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.	EM13MAT315 Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema (resolução de equação do 2º grau). EM13MAT405 Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.	Conhecer diferentes estratégias, selecionar a mais adequada e aplicá-la para resolver equações do 2º grau. D31 (EF) e D17 (EM) Resolver problema que envolva equação do 2º grau.

TEMA 3: FUNÇÃO DO 2º GRAU		
Competências específicas da área: propostas para o Ensino Médio	**Descrição das habilidades focais de matemática do EM**	**Descritores SAEB**
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	EM13MAT302 Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. EM13MAT402 Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. EM13MAT502 Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$ EM13MAT503 Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. Essa vai dar para contemplar? Ela está no 3º ano).	Reconhecer a representação algébrica de uma função do 2º grau (quadrática). Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 2º grau. Resolver problemas envolvendo uma função do 2º grau.

TEMA 4: TEOREMA DE PITÁGORAS E RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO			
Competências específicas da área: propostas para o Ensino Médio	**Habilidades focais do EF: anos finais que são conhecimentos prévios**	**Descrição das habilidades focais de matemática do EM**	**Descritores SAEB**
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	EF06MA25 Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas. EF07MA24 Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. EF09MA14 Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.	EM13MAT306 Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. EM13MAT308 Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. (apenas o Teorema de Pitágoras).	D10 (EF) Utilizar relações métricas do triângulo retângulo (Teorema de Pitágoras) para resolver problemas significativos. Identificar as relações trigonométricas (seno, cosseno, tangente) no triângulo retângulo. Resolver problemas envolvendo as relações trigonométricas (seno, cosseno, tangente) no triângulo retângulo. Resolver problemas envolvendo as relações trigonométricas de ângulos notáveis (30o, 45o e 60o).

Neste quadro você encontra o resumo das atividades desta Sequência Didática, bem como os objetivos específicos e o tempo sugerido para cada uma delas.

	ATIVIDADE	TEMPO	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	RESUMO
1	Ampliando o universo numérico e fatorando expressões algébricas	9 horas/ aula	Explorar operações com radicais e fatorar expressões algébricas.	A proposta está dividida em 5 momentos: **Momento 1:** Explorando a história da Matemática; **Momento 2:** Explorando as operações com números irracionais; **Momento 3:** Problema da Borda; **Momento 4:** Fatorando números naturais e expressões algébricas; **Momento 5:** Ampliando a fluência na fatoração de expressões algébricas.
2	Resolvendo equações do 2º grau	10 horas/ aula	Explorar diferentes estratégias para resolver equações do 2º grau.	A proposta está dividida em 4 momentos: **Momento 1:** Reconhecer equação do 2º grau e resolver equações incompletas do tipo $ax^2 + c = 0$ ($b = 0$); **Momento 2:** Resolvendo equações do 2º grau incompletas, do tipo $ax^2 + bx = 0$ ($c = 0$); **Momento 3:** Resolvendo equações do 2º grau completas (fatoração, soma e produto e fórmula de Bháskara); **Atividade Extra:** cálculo mental: resolução de equações do 2º grau.
3	Estudando as funções do 2º grau	5 horas/ aula	Além da compreensão do conceito de perímetro e área e a aprendizagem significativa das expressões matemáticas relacionadas ao cálculo dessas medidas, nesta proposta será abordado o conceito de grandezas direta e inversamente proporcionais.	A proposta está dividida em 3 momentos: **Momento 1:** Identificando funções do 2º grau; **Momento 2:** Ampliando a exploração da representação gráfica das funções do 2º grau; **Momento 3:** Jogo Família das funções.
4	Ângulos, triângulos, teorema de Pitágoras e as relações trigonométricas no triângulo retângulo	15 horas/ aula	Retomar o estudo de ângulos e de triângulos, explorar o teorema de Pitágoras, as relações trigonométricas no triângulo retângulo e o cálculo dessas relações para os ângulos notáveis.	A proposta está dividida em 5 momentos: **Momento 1:** Revendo ângulos e triângulos; **Momento 2:** Explorando o Teorema de Pitágoras; **Momento 3:** As relações trigonométricas no triângulo retângulo: Seno, Cosseno e Tangente; **Momento 4:** Construindo um teodolito para medir altura; **Momento 5:** As relações trigonométricas dos ângulos notáveis: 30°, 45° e 60°.
5	Resolução de problemas	1 hora/aula	Resolver um problema de lógica.	

ORIENTAÇÕES GERAIS

UMA CONVERSA INICIAL

A matemática deve ser compreendida como um conhecimento essencial à formação de todos os jovens, pois contribui para a construção de uma visão de mundo, para a leitura e interpretação de dados da realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional.

Desta forma, é preciso ampliar o estudo da matemática para além da simples memorização e aplicação de fórmulas. Faz-se necessário possibilitar que o estudante perceba que esta é uma ciência com características próprias de investigação e linguagem.

Nesse sentido, as situações e desafios apresentados devem instrumentalizar a forma de pensar do estudante, capacitando-o a compreender e interpretar situações, apropriar-se de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões e generalizar, ou seja, habilidades essenciais à sua formação.

Professor/a, como esta SD apresenta muitas informações, termos, nomenclaturas e representações da linguagem matemática, que podem ser desconhecidas pelos estudantes, sugerimos que você proponha aos estudantes que elaborem um lapbook, uma espécie de dicionário/glossário ilustrado. Em toda aula, vocês poderão selecionar os conceitos, os termos, a nomenclatura e as representações matemáticas que farão parte do lapbook em uma lista.

A ideia é que, no final de cada etapa, para sistematizar as aprendizagens, você oriente o estudante a completar o seu material, inserindo registros que evidenciem o que ele aprendeu. Incentive-o a fazer anotações completas com desenhos, esquemas, breves descrições, lembretes relacionados a cada tema estudado.

Atividades como essas colocam o estudante no centro do processo de ensino/aprendizagem, pois, enquanto produz o material, ele aprende fazendo, registrando, sistematizando e dialogando com seus pares.

Esse material poderá ser consultado tanto em momentos de exercitação quanto em atividades avaliativas.

Para saber mais sobre lapbook, acesse:

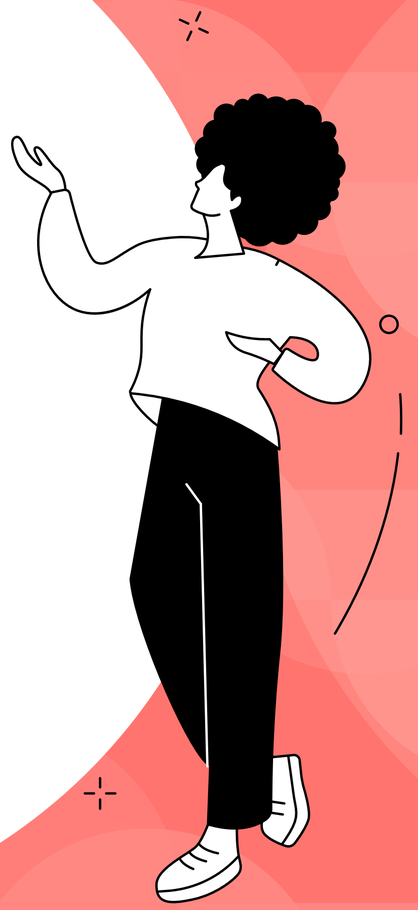
- bityli.com/glossario (acesso em: 29 jun. 2022).
- bityli.com/dicionario-mat (acesso em: 29 jun. 2022).
- bityli.com/yt-lapbook (acesso em: 29 jun. 2022).
- bityli.com/construcao-lapbook (acesso em: 29 jun. 2022).

LEITURAS E VÍDEO INDICADOS

- "A resolução de problemas e o pensamento matemático", de Kátia Stocco Smole, disponível em: bityli.com/resolucao-prob (acesso em: 26 maio 2022).
- "Geometria é mais que prova", de Alan Hofer, disponível em: bityli.com/geo-hofer (acesso em: 7 jun. 2022).
- Os jogos nas Aulas de Matemática - extraído do livro "Cadernos do Mathema - Jogos de Matemática - vol 3", de Kátia Stocco Smole, Maria Ignez Diniz, Neide Pessoa e Cristiane Ishihara, disponível em: bityli.com/jogos-aulas (acesso em: 7 jun. 2022).
- "Bháskara é só uma alternativa", de Wellington Soares e Jacqueline Hamine, texto da Nova Escola, disponível em: bityli.com/bhaskara-alternativa (acesso em: 8 jun. 2022).
- Para uma reflexão sobre equidade, sugerimos o texto "Abrindo Nossas Ideias: Como uma abordagem matemática voltada para todos os alunos promoveu respeito, responsabilidade e alto rendimento", de Jo Boaler, disponível em: bityli.com/yc-nossas-ideias (acesso em: 28 jun. 2022).
- Vídeo "Nunca me sonharam", documentário que convida ao diálogo sobre a realidade do Ensino Médio nas escolas públicas do Brasil, pequeno recorte disponível em: bityli.com/yt-nms (acesso em: 8 jun. 2022).

Atividades

Atividade 1



ATIVIDADE 1

AMPLIANDO O CONHECIMENTO A RESPEITO DOS NÚMEROS REAIS E DA FATORAÇÃO DE NÚMEROS E DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Foco: Explorar operações com radicais e fatorar expressões algébricas.

Tempo sugerido: 9 horas/aula.

Possíveis materiais:

- Acesso ao vídeo bityli.com/mat-primeiros-sinais (acesso em: 8 ago. 2022).
- 1 cópia do **Anexo 8**, na versão impressa, para cada dupla ou disponibilize a proposta no quadro e solicite que os estudantes a copiem no caderno.
- 1 cópia do **Anexo 11** para projetar. Caso não seja possível projetar, providencie um cartaz com a figura ampliada para exibir para os estudantes.
- 1 cópia do **Anexo 1**, que pode ser projetada ou mesmo entregue na versão impressa, para cada estudante.
- 1 cópia do **Anexo 2**: um conjunto de fichas brancas e um conjunto de fichas vermelhas para cada estudante.

Iniciamos essa proposta com a exploração do vídeo "Primeiros sinais da matemática na história/Os Mistérios da Matemática", que explora um pouco da história da Matemática. Em seguida, o foco passa a ser a ampliação do conhecimento dos estudantes a respeito das propriedades das operações com números reais. Propomos aqui o desenvolvimento da habilidade EF09MA02, que está relacionada ao reconhecimento de um número irracional, conhecimento prévio necessário para os temas que serão estudados no decorrer deste percurso.

Outro foco dessa etapa é o estudo da fatoração de números e de expressões algébricas, visando o desenvolvimento parcial da habilidade EF09MA09, que tratará da compreensão do processo de fatoração (fator comum em evidência) de expressões algébricas.

ATIVIDADE 1 ▸ MOMENTO 1

1 aula:

Explorando a história da Matemática

Conhecer um pouco da história da Matemática permite que o estudante tenha uma visão mais ampla e contextualizada desta área do conhecimento. É importante compreender que a matemática é uma construção humana, que foi sendo desenvolvida ao longo do tempo, e conhecer a origem das ideias que deram forma à cultura e identificar os aspectos humanos de seu desenvolvimento, enxergando os homens e as mulheres que criaram essas ideias e as circunstâncias em que elas se desenvolveram.

Além disso, a história da Matemática traz um importante contexto para o desenvolvimento da curiosidade e o interesse do estudante, além de permitir o estabelecimento de relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

A proposta aqui apresentada contribui com o desenvolvimento das Competências Gerais 1 e 2, propostas pela BNCC, pois valoriza e utiliza os conhecimentos historicamente construídos para entender e explicar a realidade e continuar aprendendo (CG1), e exercita a curiosidade intelectual ao recorrer à abordagem própria desta ciência (CG2).

Para relembrar as Competências Gerais propostas pela BNCC, acesse: bityli.com/intro-bncc (acesso em: 1 jul. 2022).

Inicie este momento com uma roda de conversa para conhecer o que os estudantes já sabem sobre a história da Matemática. Apresente algumas perguntas mobilizadoras, como:

- *Vocês conhecem a história da Matemática?*
- *Sabem como ela foi se desenvolvendo ao longo dos séculos?*
- *Sabem como ela contribui para o desenvolvimento da humanidade?*
- *Teriam exemplos dessas contribuições?*

É possível que os estudantes respondam que não conhecem ou que sabem pouco sobre esse tema. Anuncie que eles vão assistir a um vídeo que explora esse tema e que deixa evidente que a história da Matemática se confunde com a história da humanidade. Peça que, enquanto assistem ao vídeo, anotem suas aprendizagens, registrem os pontos importantes que indicam contribuições da matemática para a humanidade etc.

Disponibilize o vídeo "Primeiros sinais da matemática na história/Os Mistérios da Matemática" no link: bityli.com/mat-primeiros-sinais (acesso em: 29 jun. 2022).

Caso esse acesso não seja possível na sala de aula, você pode sugerir que o estudante assista ao vídeo em casa, com antecedência, ou então você pode disponibilizar, para pesquisa, alguns livros didáticos ou paradidáticos que exploram aspectos da história da Matemática.

Após assistirem ao vídeo, retome a roda de conversa. Peça que socializem seus registros, comentem os pontos que chamaram sua atenção. Você pode sugerir também que, organizados em pequenos grupos, façam cartazes ou gravem podcasts contando um pouco sobre a história da Matemática e divulguem para todos os estudantes da escola, desta forma, todos compreenderão um pouco mais da importância da matemática para o desenvolvimento da humanidade.

ATIVIDADE 1 ▶ MOMENTO 2

2 aulas:

Explorando as operações com números irracionais

Esta proposta visa ampliar o conhecimento dos estudantes sobre operações com irracionais, calcular com números irracionais e fazer estimativa de raiz quadrada.

Com os estudantes em duplas, realize a proposta disponível no Anexo 8, na qual serão investigadas algumas propriedades das operações relacionadas a raízes quadradas com o uso da calculadora. Autorize os estudantes a utilizar a calculadora de seus celulares ou solicite com antecedência para que eles tragam uma calculadora para a aula. O objetivo não é provar as propriedades, mas levar os estudantes a inferir, pela observação de regularidades, que algumas relações valem e outras não.

Professor/a, muitas vezes resistimos em usar a calculadora nas aulas de matemática. Para fomentar a reflexão sobre o uso da calculadora em sala de aula, sugerimos que você leia o texto:

- "Usar ou não a calculadora em sala de aula?", de Kátia Stocco Smole, Cristiane Chica e Cristiane Akemi Ishihara, disponível em: bityli.com/usar-ou-nao-a-calcula (acesso em: 30 jun. 2022).

A proposta também contribui com o desenvolvimento da Competência Geral 2, visando exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria da matemática, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, descobrir regularidades e propriedades para formular conclusões.

Orientações para gestão da aula:

- Organize os estudantes em duplas, apresente a proposta e dê um tempo adequado para realizarem as atividades.

- Incentive-os a utilizar a calculadora para agilizar os cálculos, visto que o objetivo aqui não é o desenvolvimento da habilidade de cálculo, mas sim a observação de regularidades e a exploração de algumas propriedades.

- Enquanto realizam a proposta, circule pela sala, observe as conclusões tiradas e anote as dúvidas mais comuns para discuti-las no momento coletivo.

Ao final da realização da atividade, convide alguns estudantes a socializar seus registros, os resultados obtidos e suas conclusões. Incentive-os a explicar como pensaram para preencher cada lacuna do item d) com = ou ≠.

Professor/a, observe que, em vários momentos desta SD, sugerimos que você convide os estudantes a socializar seus registros e suas estratégias. É importante você diversificar os estudantes, evitar chamar sempre os mesmos, estimular inclusive os mais tímidos a participar, dar voz a todos, para que se sintam acolhidos e respeitados.

Se necessário, aproveite o momento para explorar as dúvidas dos estudantes que você anotou enquanto observava os grupos em ação. É importante conduzir a reflexão final, sistematizando as conclusões obtidas, e convidar o estudante a registrar no seu lapbook as descobertas/aprendizagens. Incentive-o a fazer desenhos, esquemas, breves descrições, lembretes e exemplos relacionados ao tema estudado, e relembre que essas anotações poderão ser retomadas sempre que necessário.

Espera-se que os estudantes concluam que, quando a ≠ 0 e b ≠0, temos:

$\sqrt{a}+\sqrt{b} ___ \neq ___ \sqrt{(a+b)}$ $\sqrt{a}-\sqrt{b} ___ \neq ____ \sqrt{(a-b}$

$\sqrt{a}.\sqrt{b} ____ = ___ \sqrt{(a.b)}$ $\sqrt{a}/\sqrt{a} ___ = ___ \sqrt{(a/b)}$

Mas quando os valores de b = 0, temos $\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{(a+b)}$ e $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \sqrt{(a-b)}$ porém quando a = 0, temos $\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{(a+b)}$ e $\sqrt{a}-\sqrt{b} \neq \sqrt{(a-b)}$.

Para finalizar essa etapa, apresente uma pequena lista com atividades envolvendo as operações e propriedades estudadas. Você pode selecionar propostas de livros didáticos do 9° ano do Ensino Fundamental disponíveis na escola. Esse fechamento é necessário para ajudar os estudantes a exercitar os conhecimentos obtidos na investigação, bem como para que eles percebam que suas aprendizagens podem ser aplicadas em outras situações.

Em seguida, explore algumas das situações contempladas nesta pequena lista, evidenciando que essas propriedades podem ser muito úteis para o cálculo mental de raízes exatas e não exatas.
Por exemplo:

$\sqrt{36} = \sqrt{(4.9)} = \sqrt{4}.\sqrt{9} = 2 . 3 = 6$

$\sqrt{1600} = \sqrt{16}.\sqrt{100} = 4 . 10 = 40$

$\sqrt{12} = \sqrt{(4.3)} = \sqrt{4}.\sqrt{3} = 2.\sqrt{3}$

ATIVIDADE 1 ▶ **MOMENTO 3**

2 aulas:

Problema da Borda

Esta atividade foi adaptada da proposta disponível em: https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2020/05/O-problema-da-borda-Semana-1-Dias-1-2-plano-de-aula.docx.pdf (acesso em: 1 jul. 2022).

Para retomar noções de aritmética e medidas e avançar com o estudo da álgebra, optamos por apresentar um problema que fomenta inicialmente a reflexão sobre a borda de uma grade de 10 x 10; depois, para a borda de uma grade de qualquer tamanho; para, em seguida, passar para a escrita de expressão algébrica e, então, para a reescrita de expressões algébricas equivalentes. Essa ordem na organização didática desta proposta é feita de modo intencional, chamamos de "piso baixo e teto alto", de acordo com Jo Boaler. Trata-se de atividades em que todos os estudantes, trabalhando juntos e em grupos, podem se envolver, independentemente do seu entendimento ou conhecimento prévio. Elas são suficientemente amplas para que possam se expandir até níveis mais altos, de forma que os estudantes possam ser, profundamente, desafiados.

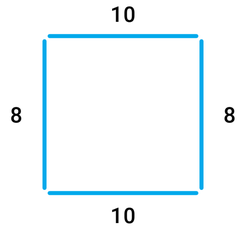
Além de desenvolver o pensamento algébrico dos estudantes, essa atividade pode dar pistas a você de quanto seus estudantes já avançaram no estudo da álgebra e quais os pontos que ainda merecem atenção, podendo nortear o planejamento das aulas que envolvem essa unidade temática.

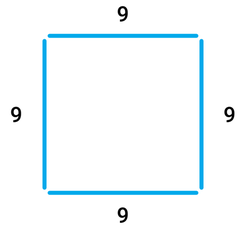
Comece organizando os estudantes em pequenos grupos e orientando-os que nessa proposta não vale contar os quadradinhos, pois o objetivo aqui é desenvolver estratégias para resolver os desafios, sem utilizar a contagem. Em seguida, projete uma grade de 10 x 10 (disponível no Anexo 11) por alguns segundos apenas e desafie-os a dizer quantos quadradinhos tem a borda dessa grade quadrada.

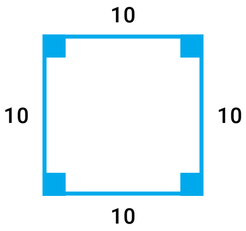
Deixe um tempo para pensarem e depois inicie a exploração. Inicialmente, peça a algum estudante que mostre suas respostas, apresente sua forma de ver a borda e explique como pensou. Registre no quadro sem dar qualquer indicação de erro ou acerto.

Convide mais alguns grupos para socializarem as respostas e registre as estratégias diferentes no quadro. Cada estratégia registrada no quadro é acompanhada pelo nome dos estudantes para mostrar que, a partir de então, um determinado método lhe pertence.

Algumas respostas esperadas:







OS QUADRADOS AZUIS REPRESENTAM A RETIRADA DOS QUADRADOS DAS ARESTAS

Caso alguma dessas estratégias não seja mencionada, você pode apresentá-la na classe dizendo que um colega de outra turma fez dessa forma e convidar os estudantes a explicar como ele pensou. Isso oferece aos estudantes a aquisição de novas estratégias e permite a reflexão e compreensão de processos e representações matemáticas.

O próximo passo é convidar os estudantes a escolher uma das estratégias apresentadas e aplicá-la em uma grade de 6 x 6, mas, desta vez, eles devem fazer uma representação visual (se possível peça que utilizem canetas coloridas) e uma expressão numérica. Para concluir essa etapa, solicite que coloquem seus registros sobre a carteira e convide a todos a circular pela sala, conferindo todos os trabalhos. Dê um tempo para que todos visualizem as produções de cada grupo. Em seguida, promova uma conversa sobre os diferentes métodos que os grupos usaram e as diferentes representações visuais que foram apresentadas.

Em seguida, diga que, em outra turma, você pediu para os estudantes apresentarem como descobriram quantos quadradinhos existem na borda de uma grade 3x3. Apresente as respostas dos estudantes (disponíveis na 2ª parte do Anexo 11) e questione os grupos:

- *Essas respostas estão corretas? Explique.*

Dê um tempo adequado para pensarem e, depois, abra uma roda de conversa. Garanta que todos percebam que o primeiro registro não considerou somente os quadradinhos da borda; no segundo registro, foram esquecidas algumas arestas quando foi registrado "3 + 3 + 2 + 2"; e o último registro estava correto.

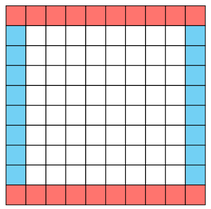
O próximo passo é pedir que cada equipe escreva, utilizando a linguagem materna, uma descrição de como usar uma das estratégias apresentadas anteriormente para descobrir o número de quadradinhos da borda de uma grade de qualquer tamanho.

Peça que socializem suas descrições e aproveite o momento para fazer os ajustes necessários, mas não apresente a resposta final pronta, conduza a conversa com boas perguntas para que os próprios estudantes identifiquem o que precisa ser ajustado. Por exemplo, se o estudante disser: *Multiplique por quatro o número de quadradinhos da base (n).* Questione:

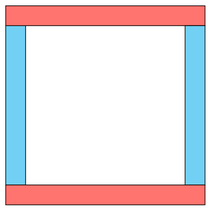
- *Observe o quadradinho do canto inferior esquerdo: ele está sendo contado na base?*
- *Ele está sendo contado na borda esquerda?*
- *Acontece o mesmo com todos os quadradinhos que estão nos cantos?*
- *O que você poderia fazer para resolver essa situação?*

Após esse momento, convide os estudantes a escrever uma expressão matemática para representar o número de quadradinhos da borda de qualquer grade (n x n).

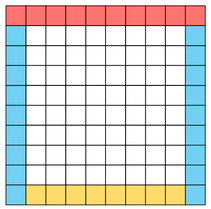
Apresentamos a seguir uma representação visual de diferentes soluções, sempre comparadas com a grade 10 x 10. **Mas atenção:** não recomendamos que você mostre isso aos estudantes. Deixe-os formarem suas soluções.



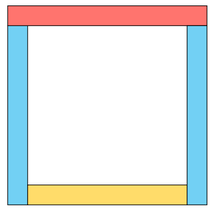
10 + 8 + 10 + 8



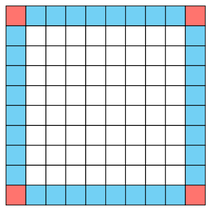
n + (n - 2) + n + (n - 2)



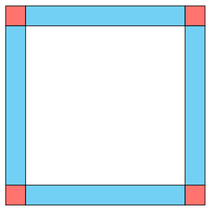
10 + 9 + 9 + 8



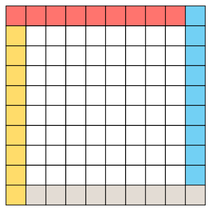
n + 2 (n - 1) + (n - 2)



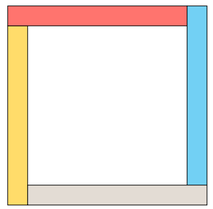
4 . 8 + 4



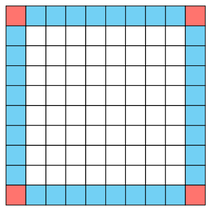
4 . (n - 1) + 4



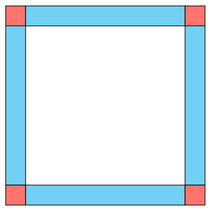
9 + 9 + 9 + 9



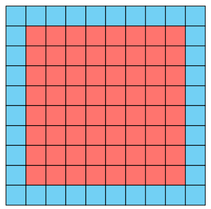
(n - 1) . 4



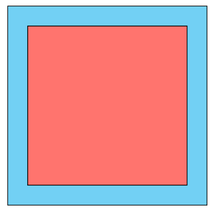
4 . 10 - 4



4n - 4



(10 . 10) - (8 . 8)



$n^2 - (n - 2)^2$

No final, convide os estudantes a socializar a expressão obtida, escreva todas elas no quadro e questione: “Será que elas são expressões equivalentes?”. Desafie-os a, por exemplo, partir da expressão 4(n-2) + 4 e obter a expressão 4n - 4, ou então partir de (n-1) . 4 e obter 4n - 4. No final, sistematize que todas as expressões obtidas são equivalentes a 4n - 4. Por meio de problematizações, relembre a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, relembre a associação de termos semelhantes.

Questione como foi a realização da proposta: “Como vocês se sentiram ao vencer os desafios?”. Deixe uma mensagem de Mentalidade de Crescimento: “Adorei mostrar a vocês uma ideia de difícil resolução e perceber o quanto vocês se dedicaram na busca das soluções. Lembrem-se de que quanto mais dificuldade sentem com uma ideia, mais seu cérebro ‘se fortalece’. Eu poderia passar coisas nesta aula que todos vocês acertariam, mas isso não os ajudaria de verdade. Pode até dar uma sensação agradável, mas não ajudaria. O que vocês realmente devem fazer é enfrentar os desafios.”

ATIVIDADE 1 ▶ MOMENTO 4

2 aulas:

Fatorando números naturais e expressões algébricas

Professor/a, nesta proposta, o foco é estudar a fatoração de expressões algébricas, apoiando-se no conceito de perímetro e área já estudados anteriormente, visando o desenvolvimento parcial da habilidade EF09MA09 no sentido da compreensão do processo de fatoração (fator comum em evidência) de expressões algébricas.

Exercitar e ampliar a experiência com esse assunto é importante para a resolução de problemas, para o estudo de funções e também para a resolução de equações do 2º grau completas, assuntos contemplados nesta SD.

Inicie a proposta retomando a fatoração de números naturais. Desafie os estudantes a escrever o número 42 de diferentes formas, utilizando produto(s). Em seguida, convide-os a registrar na lousa os produtos obtidos.

Enfatize que existem diferentes possibilidades para escrever o número 42 utilizando produtos 2 x 21; 2 x 3 x 7; 6 x 7; 1 x 42, entre outras. É importante neste momento não se limitar a produtos que envolvem os números primos.

Aproveite o momento para sistematizar que fatorar um número natural é escrevê-lo na forma de produto de fatores.

Se considerar adequado, para ampliar os conhecimentos dos estudantes, solicite que procurem no dicionário o significado da palavra fatorar e/ou fatoração e, se necessário, explore mais algumas propostas, como fatorar os números 75, 216, 300, entre outros.

Anuncie então que vão ampliar o estudo da fatoração e questione:

- *Será que é possível fatorar uma expressão algébrica?*
- *Vocês já ouviram falar sobre esse tema?*
- *Como fatorar a expressão x^2+2xy?*

Convide-os a fazer algumas explorações para depois responder a essa pergunta. Explique que as explorações que serão realizadas vão envolver os conceitos de área e perímetro. Se necessário, retome o conceito de área e de perímetro: ideia de medir, de saber quantas unidades de medida são necessárias para medir o contorno ou para cobrir uma determinada figura plana.

Apresente a atividade disponível no Anexo 1 e explore coletivamente uma das expressões algébricas presentes na proposta, apresentando algumas questões norteadoras, como:

- *Qual a medida dos lados do primeiro retângulo?*
- *O que significa dizer que a medida do lado do retângulo é igual a x?*
- *Como calcular o perímetro do retângulo?*

Garanta que todos compreendam que, no retângulo apresentado, os valores de x e y são variáveis e podem assumir qualquer valor real positivo, visto que indicam as medidas dos lados da figura.

Aproveite também para explorar que a expressão utilizada para obter o perímetro do retângulo pode ser: x + y + x + y ou 2x + 2y. Incentive-os a explicar como é possível obter a expressão 2x + 2y a partir de x + y + x + y.

Se necessário, retome alguns conceitos da álgebra como termos semelhantes e as propriedades comutativa e associativa da adição. É provável que os estudantes já tenham trabalhado com estas propriedades algébricas, então, neste momento, eles poderão exercitar e ampliar a experiência com esses assuntos, que são importantes para a resolução de problemas e para o estudo das funções. No entanto, se eles ainda não aprenderam, terão uma nova chance agora.

Após a exploração inicial, solicite que, individualmente, os estudantes resolvam as atividades 1 e 2 do Anexo 1 (figura a seguir).

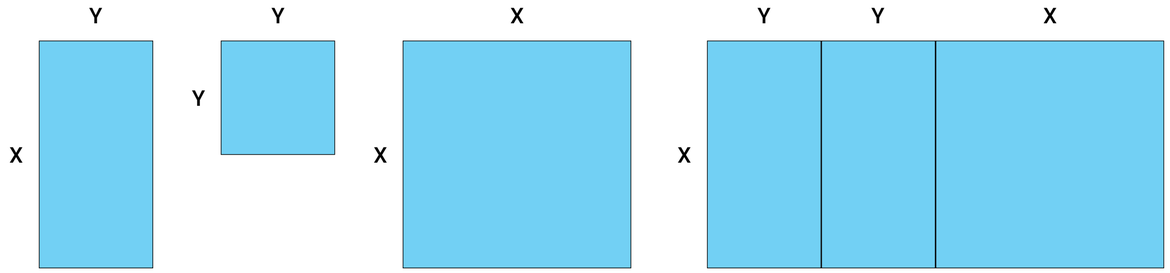


FIGURA A

Incentive-os a insistir, e não desistir de buscar uma estratégia para resolver a situação. Comente com eles que nosso cérebro também aprende quando erramos e tentamos novamente. Aproveite o momento para verificar o que os estudantes já sabem sobre expressões algébricas: coeficiente, grau, termos semelhantes, adição e subtração de polinômios. Termos, conceitos e ideias que poderão fazer parte do lapbook deles.

Em seguida, solicite que se juntem a um colega para comparar suas resoluções, identificar semelhanças e diferenças, e fazer ajustes quando necessário.

Respostas esperadas:

1. Qual a expressão que indica a área do quadrado maior? x^2
2. Qual a área do quadrado quando x = 5 u.a.? 25 u.a
3. E quando x = 8 u.a.? 64 u.a.
4. Qual a expressão que indica a área do quadrado menor? y^2
5. Qual a área do quadrado quando y = 2? 4 u.a.
6. Quem está correta: Júlia ou Simoni? Espera-se que os estudantes identifiquem que tanto Júlia quanto Simoni estão corretas.

Aproveite o momento para explorar que essas expressões são equivalentes e que é possível transformar uma em outra utilizando propriedades matemáticas. Apresente algumas perguntas norteadoras, como:

- É possível partir da expressão x(x + 2y) e, utilizando algumas propriedades matemáticas, encontrar a equação $x^2 + 2xy$? Explique.
- Como obter a expressão $x^2 + 2xy$ partindo de $x^2 + xy + xy$?

Espera-se que os estudantes concluam que se adicionarem os termos semelhantes da expressão $x^2 + xy + xy$, obtém-se $x^2 + 2xy$ ou, então, se aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição em x(x + 2y), obtém-se $x^2 + 2xy$.

Discuta também que x(x + 2y) é a forma fatorada de $x^2 + 2xy$. Retome o conceito de fatoração de números naturais: fatorar um número natural é escrevê-lo na forma de produto; da mesma forma, fatorar uma expressão algébrica é escrevê-la na forma de produto, assim:

$x^2 + 2xy = x(x + 2y)$

soma = produto (forma fatorada)

Retome o desafio que você fez no início da proposta:

- *Como fatorar a expressão $x^2 + 2xy$? Conseguimos respondê-la agora?*

Proponha que resolvam as atividades 3 e 4 do Anexo 1 e depois conversem sobre as conclusões obtidas.

No item 3, espera-se que os estudantes concluam que a área x.t + y.t + 3t também pode ser expressa na forma fatorada t(x + y + 3). Amplie as discussões apresentando algumas perguntas que levem os estudantes a refletir sobre o fato de existir uma letra comum em todas as parcelas, por exemplo:

- *Qual a letra que aparece em todos os termos da 1ª escrita?*
- *O que acontece com essa letra quando escrevemos essa expressão na forma fatorada?*

Com base nessas observações, questione a proposta 4:

- *O mesmo acontece na proposta 4?*
- *Qual a letra comum em todas as parcelas?*
- *Como ficaria a forma fatorada dessa expressão?*

Resposta esperada: $y^2 - 3xy + 2y = y(y - 3x + 2)$.

Sistematize as discussões com o grupo do vocabulário matemático pertinente a atividade: o y é um fator comum em todas as parcelas da expressão $y^2 - 3xy + 2y$ e, por isso, para fatorá-la, ele foi colocado em "evidência". Explore também que se aplicar a propriedade distributiva na forma fatorada, obtém-se a expressão inicial:

$y(y - 3x + 2) = y^2 - 3xy + 2y$

Aproveite e retome os casos anteriores. Na expressão $x^2 + 2xy$, o fator comum é o x e, para fatorá-la, basta colocá-lo em evidência, obtendo-se x(x + 2y); e, na expressão x.t + y.t + 3t, o fator comum é o t e, para fatorá-la, basta colocá-lo em evidência, obtendo-se t(x + y + 3).

ATIVIDADE 1 ▶ MOMENTO 5

2 aulas:

Ampliando a fluência na fatoração de expressões algébricas

Para aumentar a fluência dos estudantes na fatoração de expressões algébricas, disponibilize uma cópia do Anexo 2.

O foco desta proposta é aumentar a fluência dos estudantes na fatoração de expressões algébrica. A opção por trabalhar com um material manipulativo tem como objetivos: engajar os estudantes pelo lúdico da atividade; trazer uma aprendizagem mais significativa; e contemplar aqueles que ainda têm dificuldades com a álgebra, mas que possuem boa visualização das formas geométricas. É importante que os estudantes tenham clareza que todos podem aprender matemática, que, às vezes, uma representação pode ser mais fácil para uns enquanto outra representação pode facilitar a aprendizagem de outros. No caso das atividades propostas, talvez para alguns estudantes fique mais clara a representação algébrica e, para outros, a geométrica. É nesse momento que estamos "virando a chave" da mentalidade dos estudantes: aqueles que tinham uma mentalidade fixa e acreditavam que não aprendem matemática (os mais propensos a desistir frente a um desafio) podem passar a ter uma mentalidade de crescimento, vislumbrando que podem alcançar melhores desempenhos em matemática, assim, provavelmente, passarão a persistir, a não desistir, mesmo quando o trabalho parece difícil. Professor/a, é preciso acreditar que é possível mudar a mentalidade dos estudantes, tirando-os da posição estática em direção à mentalidade de crescimento. É preciso acreditar que é possível que todos os estudantes possam aprender matemática. E você é peça essencial para isso.

Essa proposta contribui com o desenvolvimento da Competência Específica 3, proposta na BNCC: Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.

Gestão da aula:

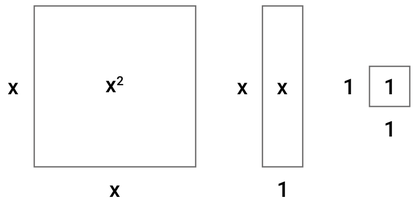
É importante que os estudantes recebam, com antecedência, as fichas do Anexo 2 e recortem os quadrados e retângulos brancos e vermelhos. Isso evita desperdício de tempo na aula e, ao mesmo tempo, trabalha o senso de responsabilidade dos estudantes para que a aula se desenvolva adequadamente.

Por ser muito lúdica, a montagem de quebra cabeças exige que os alunos possam se comunicar, mas todos devem ter em mãos o material manipulativo para que possam pensar sobre cada desafio. Prepare-se estudando a atividade antes de propô-la aos estudantes, de modo a perceber as dificuldades que eles mesmos terão em algumas das fatorações propostas.

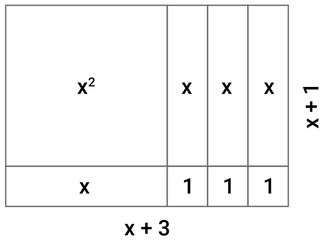
Organize a classe em grupos, assegure que todos tenham o material para a atividade e faça alguns combinados:

- Cada grupo deve ter um líder, eleito pelo próprio grupo, que coordena as atividades e evita dispersão, mas que não faz o trabalho sozinho nem pelo outro.
- O grupo deve escolher também um componente para controlar o tempo estipulado para que a atividade aconteça e outro para ser responsável pela apresentação das conclusões do grupo a todos da classe.
- É tarefa de todos os componentes não deixar ninguém para trás.

Inicie explorando a medida do lado de cada peça branca e de sua área (figura ao lado). Em seguida, convide-os a representar, com as peças brancas, um retângulo cuja área é $x^2 + 4x + 3$ e peça que escrevam essa expressão na forma fatorada. Depois de algum tempo, verifique se conseguiram construir um retângulo cujos lados medem (x + 1) e (x + 3).



RESPOSTA ESPERADA:

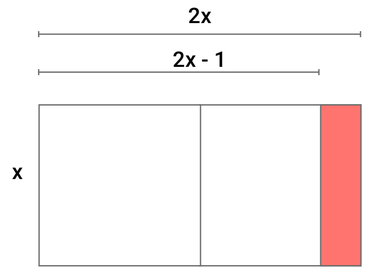


FORMA FATORADA: (x + 1)(x + 3)

Coletivamente, sistematize que (x + 1)(x + 3) é a forma fatorada da expressão $x^2 + 4x + 3$, logo $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$

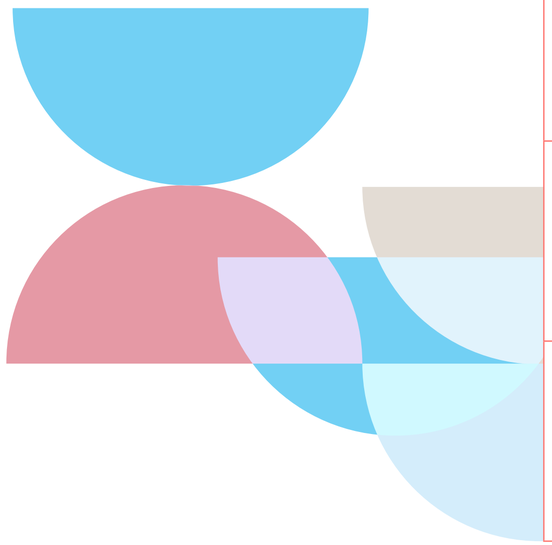
Em seguida, explore coletivamente uma situação envolvendo peças brancas e vermelhas. Explique para os estudantes que as fichas vermelhas devem ser colocadas sobre as brancas com a ideia de subtrair, da área da peça branca, a área da peça vermelha, quando sobreposta a ela. Desafie os estudantes: "Construa um retângulo cuja área pode ser representada pela expressão 2 . 2 - x e escreva essa expressão na forma fatorada." Depois de algum tempo, verifique se conseguiram construir um retângulo cujos lados medem (x) e (2x - 1).

RESPOSTA ESPERADA:

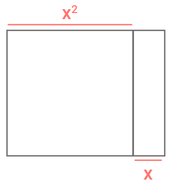
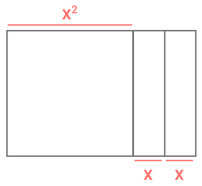
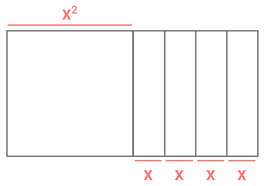
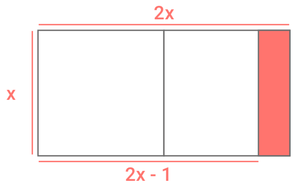
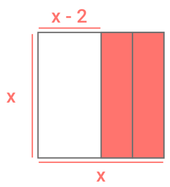


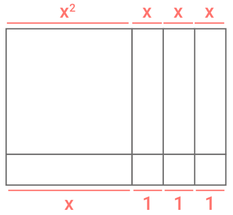
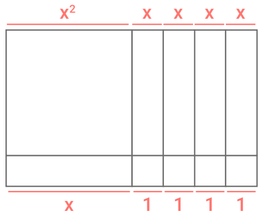
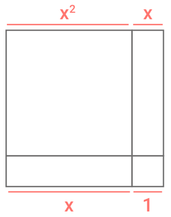
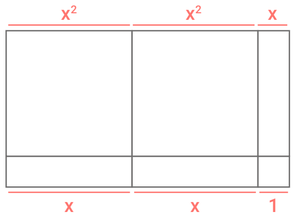
FORMA FATORADA: (x)(2x - 1)

Após essa exploração, organize os estudantes em grupos. Disponibilize no quadro a tabela abaixo e peça que a copiem no caderno. Convide-os a construir retângulos, utilizando as fichas brancas e vermelhas, e a completar a tabela.



Expressão algébrica	Figura	Medida dos lados do retângulo obtido	Expressão na forma fatorada
$x^2 + x$			
$x^2 + 2x$			
$x^2 + 4x$			
$2x^2 - x$			
		(x) e (x - 2)	x . (x - 2)

Expressão algébrica	Figura	Medida dos lados do retângulo obtido	Expressão na forma fatorada
$x^2 + x$		(x) e (x + 1)	x.(x + 1)
$x^2 + 2x$		(x) e (x + 2)	x.(x + 2)
$x^2 + 4x$		(x) e (x + 4)	x.(x + 4)
$2x^2 - x$		x e (2x - 1)	(x) . (2x - 1)
$x^2 - 2x$		(x) e (x - 2)	x . (x - 2)

Expressão algébrica	Figura	Medida dos lados do retângulo obtido	Expressão na forma fatorada
$x^2 + 4x + 3$		(x + 1) e (x + 3)	(x + 1).(x + 3)
$x^2 + 5x + 4$		(x + 1) e (x + 4)	(x + 1).(x + 4)
$x^2 + 2x + 1$		(x + 1) e (x + 1)	(x + 1).(x + 1) ou $(x + 1)^2$
$2x^2 + 3x + 1$		(x + 1) e (2x + 1)	(x + 1).(2x + 1)

Para finalizar a etapa, convide os estudantes a registrar no lapbook as suas aprendizagens e todos os termos utilizados na atividade. Incentive-os a fazer desenhos, esquemas, breves descrições e/ou lembretes e dar exemplos de situações relacionadas ao tema estudado. Explique que a fatoração será muito útil na resolução das equações do 2º grau, que é o próximo tema a ser estudado nesta SD.

Para se aprofundar

Para aprofundar a exploração da fatoração de expressões algébricas quadráticas, você pode propor as atividades disponíveis nos planos de aula da Nova Escola:

- “Usando o fator comum para fatorar expressões quadráticas”, disponível em: bityli.com/usando-o-fator-comum (acesso em: 7 jun. 2022).

- “Resolver situações-problemas associados a mais de um caso de fatoração”, disponível em: bityli.com/resolver-situacoes-problemas (acesso em: 7 jun. 2022).

Você pode também utilizar propostas do material didático disponível em sua escola.

Atenção para a avaliação!

No final da proposta, incentive os estudantes a registrar o significado de área e perímetro, aplicar a propriedade distributiva, fatorar uma expressão algébrica e colocar em evidência. Eles podem fazer o registro escrito no caderno e, depois, você propõe uma correção coletiva para que cada um aprimore o que escreveu.

É muito importante que os estudantes tenham clareza que:

- Assim como aprenderam a multiplicar e dividir números e exploraram as propriedades dessas duas operações, agora fazem o mesmo com as expressões algébricas.

- O cálculo algébrico envolvendo a fatoração e a propriedade distributiva estuda como efetuar o produto de expressões com letras, ampliando assim o seu conhecimento sobre essas operações.

- A fatoração permite resolver algumas equações com maior rapidez e eficiência.

Professor/a, sugerimos que você elabore uma prova com os principais conceitos trabalhados até o momento. Mas atenção: antes de organizar esse instrumento, sugerimos uma parada para reflexão a respeito da "prova convencional", que ainda é o instrumento mais utilizado para avaliar a aprendizagem dos estudantes.

Inicialmente, gostaríamos de destacar alguns pontos para que você reflita e anote se concorda ou não com cada um deles em relação à sua prática docente:

Geralmente a prova:

- É uma situação na qual o aluno se depara com uma atividade individual.
- Dispõe de um tempo limitado.
- Não permite a consulta dos materiais didáticos para solucionar dúvidas.
- Não permite pedir ajuda ao colega ou ao professor.

Funções da prova

- Evidenciar algumas aprendizagens (e não outras).
- Valor externo em relação a outros possíveis indicadores do rendimento escolar.
- Meio de aprendizagem para o aluno.
- Meio de comunicação entre o professor e o aluno.

Tipos de provas mais comuns::

- Escritas - ensaio ou resposta livre; de respostas breves.
- Objetivas com perguntas de verdadeiro-falso; de múltipla escolha; de relação de pares; de preenchimento de lacunas.

Com base nessa reflexão inicial apresentada acima, gostaríamos de trazer alguns pontos importantes relacionados ao instrumento prova e que merecem muita atenção. Quais os cuidados que você tem no momento de:

- Elaborar a prova?
- Preparar os estudantes para a sua realização?
- Propor a prova aos estudantes?
- Devolver a prova aos estudantes?
- Planejar/propor intervenções com base nas evidências obtidas com a correção da prova?

Após essas reflexões, deixamos aqui algumas ideias iniciais que podem contribuir com um novo olhar para a avaliação formativa, que visa não apenas constatar os conhecimentos ou não conhecimentos dos estudantes, mas contribuir com a sua aprendizagem e evolução:

Como preparar o estudante para a prova?

- Elaboração conjunta do roteiro de estudos para a prova.
- Atividades com o roteiro de estudos.

Propor diferentes tipos de provas

- Prova oral;
- Prova escrita:
  - Com consulta a uma cola autorizada (pode ser algum texto produzido por eles);
  - Em dois tempos: o professor recolhe a avaliação e faz marcações dos erros cometidos e dá dicas. No dia seguinte, entrega a avaliação e solicita aos estudantes que se dediquem a rever a avaliação com base nas dicas, finalizando a correção após esse “segundo tempo”;
  - Falsa prova: uma prova toda preenchida com questões realizadas de modo correto e incorreto. A tarefa é ser o professor e corrigir as questões dadas. Para as que estiverem erradas, deverão fazê-las corretamente;
  - Em duplas ou grupos.

Pequenas modificações na prova

Incluir:

- Os objetivos de cada questão;
- Espaço para o professor preencher com as dificuldades percebidas;
- Quadro com os possíveis erros para o professor assinalar;
- Espaço para o aluno explicar porque não resolveu a questão/quais dúvidas teve.

O que fazer após a prova? Professor/a:

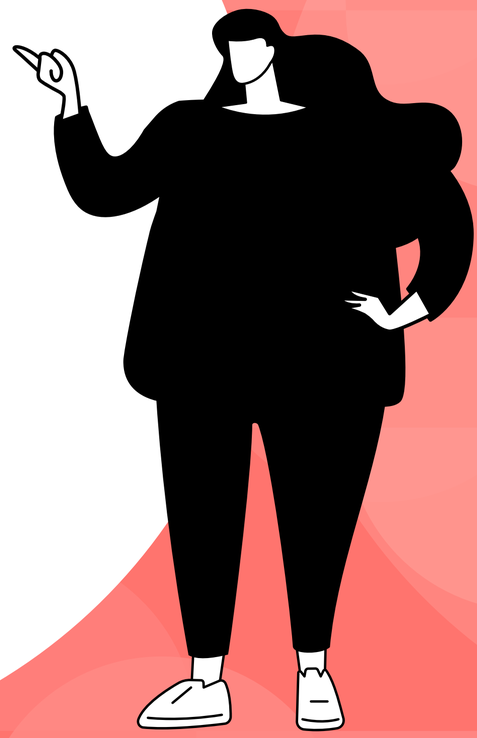
- Tabulação de dados para acompanhamento/comparação com outros dados, por exemplo, tarefas de casa.
- Atividade após a prova (orientação de estudo), na qual você poderá evidenciar para os estudantes os seus objetivos e o que já aprenderam. É possível, ainda, propor a resolução de uma lista de exercícios na qual os estudantes devem escolher com base nos erros e nas dificuldades que tiveram. Ao final, eles avaliam se a atividade ajudou a avançar.
- Separação de alguns tipos de erros clássicos, cometidos pelos estudantes, e proponha que façam uma análise e levantem pistas para não os cometer novamente.
- Realização de uma conversa aberta sobre a prova: o que foi mais fácil, o que foi mais difícil, que pontos retomar (onde e quando).
- Elaboração conjunta do roteiro para a reunião de pais.

O que fazer após a prova? Estudantes:

- Análise e correção dos erros cometidos.
- Correção da prova – análise do que fez/o que é correto/por que errou.
- Realização de comentários por escrito dos estudantes sobre o que acharam da prova.
- Análise da prova corrigida com o gabarito feito pelo professor.

Para ampliar suas reflexões e saber mais sobre o tema, sugerimos a leitura do texto “Avaliação escolar e seus instrumentos”, de Katia Stocco Smole, disponível em: bityli.com/instrumento-avaliacao (acesso em: 2 jul. 2022).

Atividade 2



ATIVIDADE 2

RESOLVENDO EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Foco: Explorar diferentes estratégias para resolver equações do 2º grau.

Tempo sugerido: 10 horas/aula.

Possíveis materiais:

- Papel quadriculado: uma folha para cada estudante.
- Calculadora: uma ou duas para cada grupo. Caso seja possível, eles podem utilizar a calculadora disponível no smartphone.
- Acesso ao vídeo bityli.com/baskhara (acesso em: 10 ago. 2022). Caso esse acesso não seja possível na sala de aula, você pode sugerir que o estudante assista ao vídeo em casa, ou então você pode disponibilizar, para pesquisa, alguns livros didáticos que exploram a fórmula de Bhaskara.
- 1 cópia do **Anexo 6** para cada grupo de estudantes. Você pode disponibilizar a versão impressa ou digital (enviar por e-mail ou pelo grupo de WhatsApp).
- 1 cópia do **Anexo 7** para cada estudante. Você pode disponibilizar a versão impressa ou digital (enviar por e-mail ou pelo grupo de WhatsApp).

Nesta etapa, a ideia é explorar a resolução de equações do 2º grau com diferentes estratégias: fatoração, soma e produto e a fórmula resolutiva, de maneira a levar o estudante a refletir qual destas estratégias é mais indicada para cada caso. As explorações serão apoiadas em forte apelo na investigação e em atividades em grupos.

Essa escolha tem como objetivo se opor ao ensino meramente expositivo e ao treino de técnicas, que muitas vezes não tem significado para os estudantes, e pode estar relacionado a não aprendizagem do tema pelos estudantes. A proposta visa também consolidar o desenvolvimento da habilidade EF09MA09 - Compreender os processos de fatoração de expressões

algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

A proposta também contribui com o desenvolvimento da Competência Geral 4, visando utilizar a linguagem matemática e científica para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo. Além disso, o diálogo, a resolução de conflitos, a cooperação e o respeito permeiam todo o processo, o que contribui com o desenvolvimento da Competência Geral 9 proposta na BNCC. Você pode relembrar estas competências aqui: "Base Comentada - Matemática e suas tecnologias",- disponível em: bityli.com/mat-e-tec (acesso em: 5 jun. 2022).

ORIENTAÇÕES GERAIS PARA GESTÃO DA SALA DE AULA

Professor/a, a proposta é que, ao longo das aulas, além das habilidades cognitivas, você observe, registre e avalie questões relacionadas ao processo de resolver problemas, de desenvolver a capacidade argumentativa (raciocínio lógico) e as habilidades relacionadas à comunicação, à autoconfiança, à autogestão (como a organização, a persistência e a responsabilidade) e a forma de aprender colaborativamente. Por isso, tenha um caderno/bloco por perto (em papel ou na versão virtual) para anotar suas observações sobre cada estudante.

Foque suas atenções nos seguintes pontos:

- **Autoconfiança e comunicação:** Os estudantes expressam suas opiniões sem temer julgamento do colega ou do/a professor/a? Como resolvem os impasses nos trabalhos em grupo? Participam das discussões coletivas? Todos se sentem ouvidos por você?

- **Colaboração:** Todos participam e colaboram com o trabalho do grupo? Como você procura envolver aqueles que demonstram falta de iniciativa ou que não têm espaço no grupo para expor sua opinião? Os estudantes demonstram respeito aos diferentes conhecimentos e opiniões?

- **Autogestão:** Os estudantes se organizam para estudos individuais e em grupos? Demonstram responsabilidade pelas atividades e propostas realizadas em sala de aula e em casa? De que forma você incentiva a persistência e a motivação diante de desafios e erros na resolução de problemas?

- **Leitura e resolução de problemas:** Os estudantes identificam os dados em cada problema? Eles se arriscam em elaborar alguma estratégia para resolver o problema ou ficam aguardando a resolução do colega ou do/a professor/a?

Sua gestão da sala de aula:

- Você procura envolver todas as/os duplas/grupos na tarefa de buscar uma solução para as situações-problema propostas?
- Você proporciona um ambiente de liberdade de expressão para seus estudantes?
- O que você tem a dizer sobre seus estudantes para os demais professores a respeito da forma como tem organizado as suas aulas?

Visite com frequência seus registros. Eles podem dar excelentes pistas tanto no momento do planejamento das suas aulas quanto nos momentos de avaliação dos estudantes.

Professor/a, o texto "Abrindo Nossas Ideias: Como uma abordagem matemática voltada para todos os alunos promoveu respeito, responsabilidade e alto rendimento" (sugerido como leitura no início desse documento e disponível em: bityli.com/yc-nossas-ideias pode apoiar suas reflexões sobre a gestão da aula.

2 aulas:

Reconhecer equação do 2º grau e resolver equações incompletas do tipo $ax^2 + c = 0$ ($b = 0$)

Inicie a proposta com uma roda de conversa, retomando alguns conceitos já estudados. Você pode fazer essa exploração a partir de duas sentenças escritas no quadro, por exemplo: $5x - 4 = 2x + 8$ e $5x - 4$. Peça que identifiquem semelhanças e diferenças entre elas. Questione: "Qual o papel da letra em cada uma das situações apresentadas? O que significa resolver uma equação? Como resolver uma equação?".

Garanta que todos reconheçam que resolver uma equação significa encontrar o(s) valor(es) da letra(incógnita) que torna(m) a expressão verdadeira e que uma equação pode ser resolvida por cálculo mental, por tentativa e erro ou mesmo por meio de um algoritmo (passo a passo) de resolução. No caso de equação apresentada acima, a solução é 4, pois $5 . 4 - 4 = 2 . 4 + 8$.

Após essa exploração inicial, anuncie que, nesta proposta, o foco é ampliar o estudo de equações e que esse estudo vai começar com uma "brincadeira". Apresente várias equações em um quadro e peça para que, em duplas, conversem sobre as características dessas equações e anotem suas observações.

Exemplos de equações que podem ser apresentadas:

$x^2 - 2x = 4$	$x^2 = 0$	$x^2 - 5x=0$
$x^2 = 16$	$4x - 2 = 3x - 1$	$0 = 13 - 5x$
$3x^2 = 27$	$x^2 + 3x - 2 = 0$	$- x^2 - x + 9 = 0$
$4x - 2 = 0$	$x^2 = -25$	$x^2 - 121 = 0$

Dê um tempo adequado para a realização da proposta. Enquanto isso, circule pela sala e aproveite o momento para verificar se os estudantes utilizam o vocabulário algébrico, ou se precisam de um apoio, e se justificam com argumentos convincentes as características observadas.

Aproveite o momento para selecionar quais as duplas que identificaram características diferentes para que você as convide para apresentá-las aos colegas no momento coletivo.

Alguns critérios que podem surgir são: possuem apenas 2 termos ou possuem mais do que 2 termos; possuem 2 como maior expoente de x ou possuem 1 como maior expoente de x (1º grau). Nesse momento, explore as características observadas e aproveite para introduzir o vocabulário adequado. Peça aos estudantes que completem seus registros com uma característica apresentada pelos colegas e que ele não tinha identificado antes.

Em seguida, apresente o quadro abaixo e peça que reescrevam na coluna adequada as equações apresentadas:

Equações do 1º grau	Equações do 2º grau

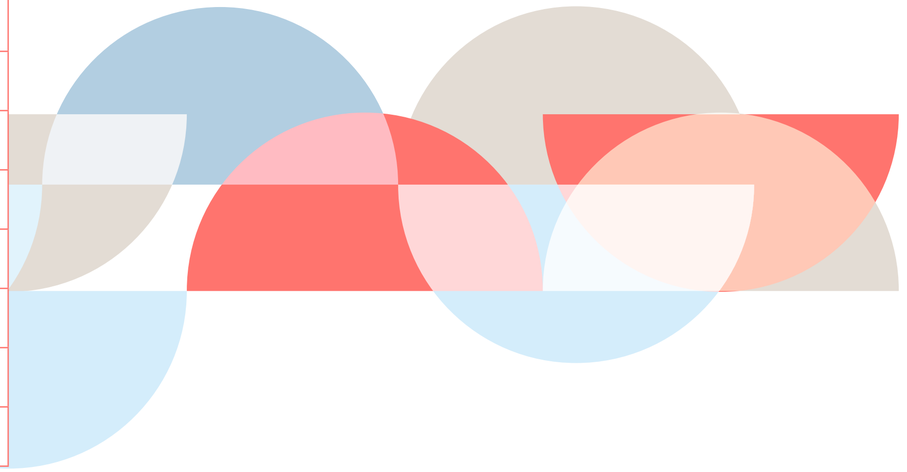
Explique que, entre as equações apresentadas, existem equações do 1º grau (que já foram estudadas anteriormente) e equações do 2º grau, que serão o foco de estudo nesta etapa da sequência didática.

Sistematize que uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c representam números reais e $a \neq 0$, é chamada equação do 2º grau e que resolver uma equação do 2º grau é encontrar o(s) valor(es) da incógnita(letra) que a torna(m) verdadeira.

Peça que observem as equações do 2º grau disponibilizadas anteriormente e as organize na tabela a seguir, que pode ser construída no caderno. Em seguida, peça que completem todas as informações.

Equação (na forma $ax^2 + bx + c = 0$)	a	b	c
$x^2 - 2x - 4 = 0$	1	-2	-4
$x^2 - 16 = 0$	1	0	-16
$3x^2 - 27 = 0$	3	0	-27
$x^2 + 3x - 2 = 0$	1	3	-2
$x^2 = 0$	1	0	0
$x^2 + 25 = 0$	1	0	25
$x^2 - 5x = 0$	1	-5	0
$-x^2 - x + 9 = 0$	-1	-1	9
$x^2 - 121 = 0$	1	0	-121

Pergunte semelhanças e diferenças entre essas equações e formalize que as equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais diferentes de zero, são equações completas, mas que existem casos em que $b = 0$ e/ou $c = 0$ e, nesses casos, as equações são ditas incompletas. Incentive-os a anotar em seus lapbooks todos os termos e conceitos aprendidos.



Organize os estudantes em pequenos grupos e apresente os desafios disponíveis no **Anexo 6**.

EXERCÍCIO 1

A professora do 1º ano pediu que seus alunos resolvessem a seguinte equação do 2º grau incompleta: $x^2 - 81 = 0$. Abaixo estão as estratégias utilizadas por 3 jovens desta turma. O seu desafio é compreender a resolução de cada jovem e verificar se ela está correta. Caso a resposta esteja incorreta, você precisa escrever uma pista para ajudar o estudante a aprimorar a sua estratégia.

MANU

Eu acho mais fácil resolver por cálculo mental. Primeiro eu sei que a equação $x^2 - 81 = 0$ é equivalente a $x^2 = 81$.
Para resolver essa equação, eu preciso pensar em um número que elevado ao quadrado dá 81.
Essa é fácil!
Eu sei que $(-9)^2 = 81$, então a resposta é -9.

CRIS

Eu resolvi assim:
$x^2 - 81 = 0$
$x^2 = 81$
Existem 2 números que tornam essa equação verdadeira:
o 9 e o (-9), pois $(9)^2 = 81$ e $(-9)^2 = 81$.
Então são duas as respostas: 9 e -9.

PEDRO

Eu sei que preciso encontrar o valor da incógnita x que torna a sentença verdadeira.
Então, eu pensei assim:
$x^2 - 81 = 0$
$x^2 - 81 + 81 = 0 + 81$
$x^2 = 81$
A resposta é 9, pois $9^2 = 81$.

Resposta: Espera-se que os estudantes concluam que a Cris está correta e que escrevam para os demais a seguinte pista: existem 2 números que tornam essa equação $x^2 - 81 = 0$ verdadeira:
o 9 e o (-9), pois $(9)^2 = 81$ e $(-9)^2 = 81$.

EXERCÍCIO 2

Agora que você analisou as resoluções de Pedro, Manu e Cris, volte nas equações do 2º grau apresentadas no início desta proposta. Selecione e resolva em seu caderno aquelas que possuem as mesmas características que a equação resolvida pelos jovens.

Resposta: Espera-se que os jovens identifiquem que a característica da equação é b = 0 e que resolvam as equações.

Equação (na forma $ax^2 + bx + c = 0$)	a	b	c	Raízes
$x^2 - 16 = 0$	1	0	-16	-4 e +4
$3x^2 - 27 = 0$	3	0	-27	-3 e +3
$x^2 = 0$	1	0	0	0
$x^2 + 25 = 0$	1	0	25	
$x^2 - 121 = 0$	1	0	-121	-11 e +11

No final da proposta, convide alguns estudantes para apresentar suas resoluções no quadro e comente as estratégias, fazendo os alinhamentos e as correções necessárias. Explore no coletivo a equação $x^2 + 25 = 0$ e questione como resolveria. É possível que respondam:

$x^2 + 25 = 0$ ▸ $x^2 + 25 - 25 = -25$ ▸ $x^2 = -25$

Nesse momento, questione qual é o número real que elevado ao quadrado resulta em -25. Anote no quadro as possíveis respostas sem emitir juízo de valor - certo ou errado -, mas peça que conversem sobre essas possibilidades. Se necessário, apresente algumas perguntas norteadoras:

- Quanto é 5^2?
- E $(-5)^2$?
- E -5^2?
- E então, qual o número real que elevado ao quadrado resulta -25?

Sistematize que não existe esse número, logo a equação $x^2 + 25 = 0$ não possui raiz real.

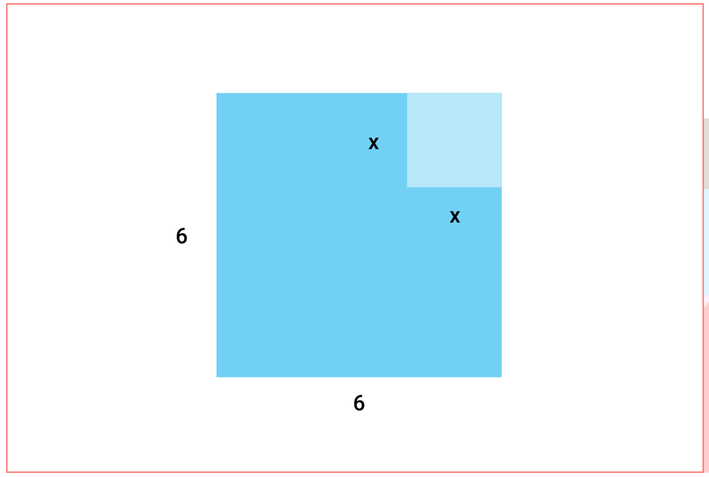
Com o objetivo de ampliar os estudos envolvendo equações do 2º grau e a resolução de equações incompletas do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$, apresente exercícios e problemas que possam ser modelados e resolvidos com esse tipo de equação e convide os estudantes a resolvê-los em duplas, como:

De um tecido quadrado de 6m, foi retirada uma parte também quadrada, conforme a figura abaixo.

a) Escreva uma expressão algébrica para representar a área restante. $36 - x^2$

b) Se x = 3m, qual a área restante do tecido? $27m^2$

c) Determine o valor de x se a área restante for 11?
$36 - x^2 = 11$ logo x = 5m



Você pode selecionar outras atividades do material didático. Para sistematizar as aprendizagens, convide os estudantes a organizar um algoritmo/fluxograma que expresse o passo a passo para resolver equações incompletas de 2º grau do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$. Eles podem trabalhar em pequenos grupos.

Vale lembrar que:

- A BNCC (2018) propõe que os estudantes sejam estimulados a desenvolver o pensamento computacional por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas.

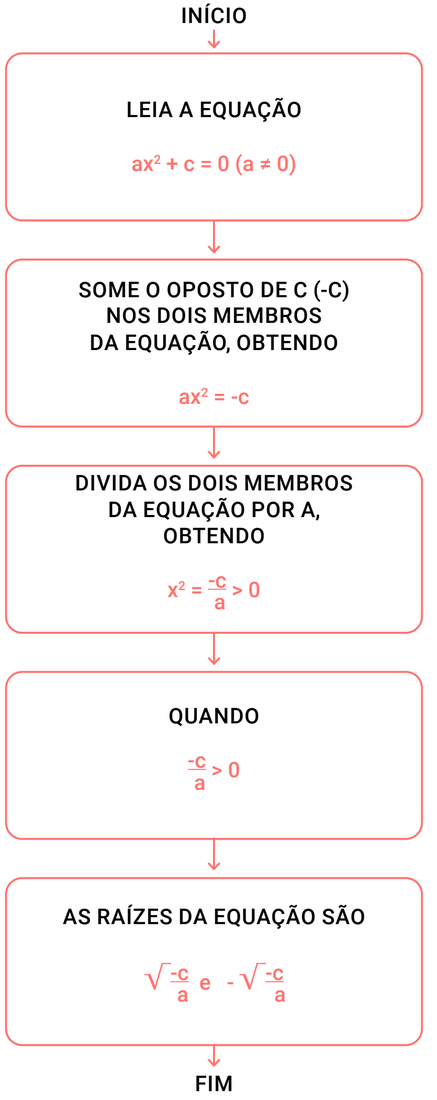
- O algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando-as e ordenando-as, e pode ser representado graficamente por um fluxograma. A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos (BNCC, 2018, p. 273).

Professor/a, os estudantes já produziram um fluxograma na segunda SD deste material. Por isso, você pode iniciar esse momento retomando o que já fizeram:

- Vamos relembrar o fluxograma que construímos?
- Como ele era?
- Para que servia?
- Como ele era organizado?
- Quais as modificações que você faria no fluxograma construído para expressar o passo a passo para resolver equações incompletas 2º grau, do tipo $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$?

Enquanto realizam a proposta, circule pelos grupos. A elaboração do fluxograma pode dar pistas para o/a professor/a sobre aquilo que o estudante já sabe e o que ainda precisa rever sobre resolução de equações incompletas. Faça registros dessas observações, pois, com base nelas, você pode propor intervenções assertivas para contribuir com a aprendizagem dos estudantes, por exemplo, você pode convidar os estudantes que já sabem para serem tutores daqueles que ainda apresentam fragilidades.

Exemplo de resposta esperada:



2 aulas:

Resolvendo equações do 2º grau incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0$ ($c = 0$)

O foco desta etapa é discutir estratégias para resolver equações do 2º grau incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0$ ($c = 0$). É bem possível que, no decorrer da atividade, o estudante identifique que a fatoração pode ser uma excelente estratégia para resolver esse tipo de equação, porém, cabe ao professor explorar que existem outras estratégias possíveis e assegurar que o estudante tenha a autonomia para escolher aquela que lhe parecer "mais fácil".

Organize os estudantes em pequenos grupos e apresente uma situação-problema que possa ser modelada por uma equação do tipo $ax^2 + bx = 0$, como:

Pensei em um número real. Elevei-o ao quadrado. Depois, somei o dobro do número pensado. E, para minha surpresa, obtive zero como resultado. Em que número pensei?

Convide-os a resolver o problema em uma folha. Incentive-os a buscar diferentes estratégias de resolução: desenhos, esquemas, tabelas, entre outras.

Enquanto eles realizam a proposta, circule pelos grupos e verifique se eles têm a iniciativa de buscar uma estratégia inicial de formular hipóteses. Se necessário, faça algumas perguntas para ajudá-los a iniciar o processo de resolução, como:

- Será que o número pensado poderia ser 3? Explique porque não poderia.
- O que precisa acontecer para que a soma desses dois números seja igual a zero? Como essa informação pode lhe ajudar a resolver o problema?

Caso o grupo encontre o número -2 como resposta, por exemplo, questione se haveria algum outro número nestas mesmas condições e incentive-os a continuar a investigação.

Anote a estratégia escolhida por cada grupo. Depois da resolução, peça aos estudantes que troquem as folhas de resolução, garantindo que cada grupo receba uma estratégia diferente daquela que utilizou. A ideia é que cada grupo analise a produção de um dos grupos, depois registre no quadro e explique para a turma a estratégia utilizada. Peça que identifiquem semelhanças

e diferenças entre as estratégias apresentadas. Convide os estudantes a escolher uma das estratégias apresentadas (diferente daquela que eles utilizaram inicialmente) e a copiá-la em seu caderno. Pergunte qual das estratégias eles acharam mais fácil, qual a mais difícil e peça que expliquem porque ela é fácil ou difícil.

Exemplos de estratégias esperadas:

a) Tabela (tentativa e erro):

NÚMERO PENSADO	NÚMERO PENSADO AO QUADRADO	DOBRO DO NÚMERO PENSADO	SOMA (EXPRESSÃO)	RESULTADO
1	1	2	1 + 2	3
-1	1	-2	1 - 2	-1
2	4	4	4 + 4	8
-2	4	-4	4 - 4	0
0	0	0	0 + 0	0

Resposta: Pensei no número zero ou no número -2.

b) Utilizando a modelagem e o Cálculo Mental:

Descobri que, para a soma dar zero, os dois números precisam ser opostos, como um número ao quadrado é sempre positivo, então o dobro desse número precisa ser negativo. A partir daí, escrevi a expressão $x^2 = -2x$. Fiquei pensando e descobri que quando x = 0, temos $0^2 = -2.0$, então o número pensado pode ser o zero. Mas também descobri que $(-2)^2 = -2.(-2)$, então o número pensado também pode ser o -2.

O próximo passo é ampliar o repertório dos estudantes e explorar a resolução por fatoração. Em outra aula, inicie com uma proposta de cálculo mental para retomar uma propriedade que é essencial para a resolução por fatoração. Coloque no quadro alguns produtos incompletos e peça que completem e, em seguida, observem as regularidades presentes, por exemplo:

___ x 3 = 0	5 x 0 = ___	6 x ___ = 12
2 x ___ = 0	___ x ___ = 6	___ x ___ = 6
0 x 15 = ___	7 x 0 = ___	___ x ___ = 0
	0 x ___ = 6	

Após a realização da atividade, convide alguns estudantes para contarem como completaram as igualdades, explicarem porque fizeram essas escolhas e quais as regularidades encontradas. Explore que as igualdade ___ x ___ = 0 pode ser completada de diferentes maneiras (5 x 0, 0 x 9 etc.), já a igualdade 0 x ___ = 6 não pode ser completada, pois é impossível o produto ser 6 se um dos fatores é zero.

Sistematize que, para um produto ser igual a zero, um dos fatores necessariamente deve ser igual a zero. Solicite que registrem suas aprendizagens no lapbook e oriente-os a consultá-lo durante a próxima etapa da atividade, pois aqui vão retornar e mobilizar/aplicar alguns temas já estudados para conhecer mais uma estratégia de resolução de equações do 2º grau incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0$ (c = 0).

Para realizar a próxima etapa, oriente-os a consultar o problema da última aula que envolvia uma equação incompleta:

Pensei em um número real. Elevei-o ao quadrado. Depois, somei o dobro do número pensado. E, para minha surpresa, obtive zero como resultado. Em que número pensei?

Retome com a turma a equação que modela essa situação, $x^2 + 2x = 0$, e diga que eles estudarão agora outra forma de resolvê-la.

Pergunte se é possível fatorar o primeiro membro e peça que consultem o lapbook para retomar os registros sobre fatoração. Se necessário, apresente algumas questões norteadoras:

- Lembram o que é fatorar?
- Lembram qual estratégia utilizamos para fatorar algumas expressões algébricas no momento 4 da Atividade 1 desta sequência?
- Existe algum fator comum na expressão $x^2 + 2x$?

Espera-se que os estudantes concluam que:
$x^2 + 2x = x (x + 2)$.

Escreva no quadro a equação e reescreva-a utilizando a forma fatorada:

$x^2 + 2x = 0$
$x (x + 2) = 0$

Questione: "O que é preciso acontecer para que esse produto fique igual a zero?". Com base nessas reflexões, coletivamente, vá explicando e registrando no quadro:

$x (x + 2) = 0$ para um produto ser igual a zero, um dos fatores precisa ser zero, então
$x = 0$ ou $x + 2 = 0$
$x = 0$ ou $x = -2$ que são as soluções da equação $x^2 + 2x = 0$

Proponha a resolução de mais algumas situações envolvendo equações do 2º grau incompletas:

$3y^2 - y = 0$, $t^2 - 5t = 0$, entre outros.

Proponha também a resolução de problemas como os propostos a seguir ou similares:

O triplo do quadrado é igual a 15 vezes este número. Qual é esse número?

Resposta esperada:
$3n^2 = 15n$ $3n^2 - 15n = 0$ $n(3n - 15) = 0$ $n = 0$ ou $n = 5$,
logo o número pode ser 0 ou 5.

Em uma conversa, aproveite para sistematizar que sempre é possível escrever $ax^2 + bx = 0$ na forma fatorada $x (ax + b) = 0$, por isso a fatoração pode ser uma excelente estratégia para resolver essas equações do 2º grau incompletas.

Com o objetivo de ampliar os estudos envolvendo equações do 2º grau e a resolução de equações incompletas do tipo $ax^2 + bx = 0$, com $a \neq 0$ e $c = 0$, apresente exercícios e problemas que possam ser modelados e resolvidos com esse tipo de equação. Você pode selecionar atividades do material didático.

Professor/a, no final desta etapa, convide os estudantes a registrar no seu lapbook as descobertas/aprendizagens realizadas. Incentive-os a fazer desenhos, esquemas, breves descrições e/ou lembretes relacionados ao tema estudado.

Atenção para a avaliação!

Para acompanhar as aprendizagens, você pode pedir para que os estudantes escrevam um e-mail contando tudo o que já aprenderam sobre resolução de equações do 2º grau para você.

Peça também que reflitam sobre sua postura durante a realização da proposta. Lembre-se de que fazer uma autoavaliação não é um processo simples, por isso sugerimos que apresente para os estudantes alguns pontos para reflexão:

- Você conseguiu expressar no trabalho em grupo suas opiniões sem temer o julgamento do colega?
- Soube ouvir a opinião dos colegas? Todos se sentiram ouvidos por você?
- Colaborou para que o grupo resolvesse o problema proposto?
- Como resolveu os impasses com grupo?
- Participou ativamente dos momentos de discussões coletivas?
- O que você poderia mudar na próxima atividade em grupo para contribuir mais com os seus colegas, para aprender mais e para garantir que nenhum colega fique para trás?

Para se aprofundar

Professor/a, antes de seguir com a exploração desta SD, que tal convidar os estudantes para explorarem um pouco a origem africana da História da Matemática? Pergunte se algum deles conhece a contribuição dos africanos para a Matemática. Se teriam exemplos a citar dessas contribuições.

Provavelmente os alunos responderão que não conhecem ou sabem pouco, o que abre a possibilidade de mais um questionamento: "Por que estudamos pouco sobre o conhecimento produzido pelos africanos na Matemática?".

Em seguida, o professor apresenta os vídeos.

- A Matemática Africana Antiga", disponível em: bityli.com/mat-africa (acesso em: 9 jun. de 2022).
- Geometria Sona", disponível em: bityli.com/geo-sona (acesso em: 9 jun. 2022).

E a realizar a leitura do texto: "Professora usa a cultura africana para ensinar matemática", disponível em: bityli.com/mat-cultura-afri (acesso em: 9 jun. 2022).

Em seguida, promova um debate para que os estudantes contem suas aprendizagens, os pontos que chamaram a atenção.

Aqui pode surgir um importante debate sobre colonialidade do saber e como nosso conhecimento está pautado em uma perspectiva eurocêntrica, que apaga os conhecimentos produzidos por povos africanos, indígenas, populações negras em diáspora, entre outros.

Pergunte se eles acham relevante saber mais sobre o tema e convide-os a continuar pesquisando sobre ele.

Convide-os a organizar formas de divulgar na escola a influência africana para a história da Matemática. Eles podem, por exemplo, organizar uma semana para debater o tema: apresentar os vídeos, o texto, e outros materiais que encontrarem em suas pesquisas e promover um debate com os colegas de outras turmas.

Atenção, professor/a, sugerimos os dois artigos abaixo para ampliar o seu repertório sobre o tema:

"Opção decolonial e modos outros de conhecer na Educação (Matemática)]", de Carolina Tamayo e Jackeline Rodrigues Mendes, disponível em: bityli.com/ed-decolonial (acesso em: 11 ago. 2022).

"Matemática e colonialidade, lados obscuros da modernidade: giros decoloniais pela Educação Matemática", de Filipe Santos Fernandes, disponível em: bityli.com/mat-e-colonialidade (acesso em: 11 ago. 2022).

ATIVIDADE 2 ▶ MOMENTO 3

5 aulas:

Resolvendo equações do 2º grau completas (fatoração, soma e produto das raízes e fórmula de Bháskara)

ETAPA 1

Resolvendo equações do 2º grau completas utilizando a fatoração

O foco da 1ª etapa do momento 3 é explorar a resolução de equações do 2º grau completas utilizando a fatoração. A ideia é retomar o estudo de fatoração de expressões algébricas realizado anteriormente e mobilizar os conhecimentos adquiridos para resolver situações que envolvem equações do 2º grau completas.

Inicie o momento retomando o que já estudaram sobre resolução de equações do 2º grau. Você pode colocar duas equações no quadro e convidá-los a resolver: $x^2 - 25 = 0$ e $a^2 + 5a = 0$.

Converse com a turma alertando que todas as equações que resolveram são incompletas e que agora vão avançar para resolver equações completas, mas diga que fiquem tranquilos. pois algumas delas poderão ser resolvidas com estratégias bastante semelhantes com as já utilizadas por eles.

Apresente então a equação $x^2+4x+3=0$ e pergunte se eles saberiam encontrar a forma fatorada para a expressão que está no 1º membro (x^2+4x+3). Diga que podem pesquisar a tabela contendo as fatorações já construída nesta SD.

Após a pesquisa dos estudantes, sistematize que a forma fatorada de x^2+4x+3 é $(x + 1).(x + 3)$, assim a equação $x^2+4x+3 = 0$ pode ser escrita de outra forma: $(x + 1).(x + 3) = 0$. Amplie as discussões questionando: "Aqui vocês têm um produto? E qual o resultado desse produto? Em que situações o produto pode ser igual a zero?" Peça que conversem com o colega ao lado, e que, juntos, tentem formular hipóteses/ validar hipóteses. Enquanto eles realizam a proposta, circule pelos grupos e apresente algumas perguntas norteadoras para ampliar as reflexões já iniciadas no momento anterior.

Depois que os grupos realizaram a proposta, abra uma roda de conversa. Convide alguns estudantes a explicar como pensaram e quais as conclusões do grupo. Aproveite o momento para sistematizar que se o

resultado de um produto é igual a zero, necessariamente pelo menos um dos seus fatores é zero, logo:

$(x + 1).(x + 3)= 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -3$, então -1 e -3 são as raízes da equação $x^2 + 4x + 3 = 0$.

Se necessário, retome o significado de que resolver uma equação é encontrar sua(s) raiz(raízes), ou seja, encontrar todos os valores que podem substituir o valor da incógnita e que tornam essa equação verdadeira.

Assegure-se de que todos entenderam e peça que completem a 1ª linha da tabela. Em seguida, proponha que os grupos realizem a atividade a seguir, que pode ser colocada no quadro e os estudantes copiam no caderno. Oriente-os a buscar a forma fatorada do 1º membro das equações na tabela construída na 1ª atividade desta SD. As resposta esperadas estão destacadas em vermelho.

Equação $ax^2 + bx + c = 0$	Equação na forma fatorada $(x+p).(x+q)=0$	Raízes da equação (-p e -q)
$x^2 + 4x + 3 = 0$	$(x + 1).(x + 3) = 0$	-1 e -3
$x^2 + 5x + 4 = 0$	$(x + 1).(x + 4) = 0$	-1 e - 4
$x^2 + 2x + 1 = 0$	$(x + 1).(x + 1) = 0$ ou $(x + 1)^2= 0$	-1 (duas raízes iguais)
$2x^2 + 3x + 1 = 0$	$(x + 1).(2x + 1) = 0$	-1 e -1/2
$x^2- 3x + 2 = 0$	$(x-1). (x-2) = 0$	1 e 2

Enquanto os estudantes realizam a proposta, circule pela sala, observe e registre se os estudantes reconhecem os fatores, utilizam parênteses corretamente e se reconhecem as raízes das equações.

É importante que os estudantes, em suas falas, demonstrem se estão ou não entendendo a resolução de equações do 2º grau pelo processo de fatoração. Faça orientações individuais para as dúvidas pontuais e anote as dúvidas comuns para discutir no momento coletivo.

Depois que todos completaram a tabela, divulgue um gabarito comentado e peça que identifiquem semelhanças e diferenças entre a resolução do grupo e a apresentada pelo/a professor/a e, em caso de dúvidas/ converse com os colegas ou peça ajuda do/a professor/a. Faça também uma conversa coletiva sobre a penúltima equação da tabela, pois, como ela envolve números racionais não inteiros, talvez os estudantes apresentem dificuldade em resolvê-la.

A atividade apresentada na última linha da tabela é semelhante às anteriores, porém tem como objetivo analisar equações com coeficientes negativos. Apesar da maior complexidade, geralmente os alunos se sentem muito desafiados e envolvidos com as investigações propostas.

Professor/a, no final desta etapa, convide os estudantes a registrar no seu lapbook as descobertas/ aprendizagens realizadas. Lembre-os que esse material poderá ser utilizado em momentos de exercitação ou mesmo de avaliação, desta forma, é importante fazer anotações completas, contendo esquemas, breves descrições, lembretes e alguns exemplos relacionados ao tema estudado.

Para se aprofundar

Para profundar a exploração da resolução de equações completas do 2º grau, desenvolvendo a fluência dos estudantes, utilizando a fatoração, você pode propor as atividades disponíveis nos planos de aula da Nova Escola: “Resolvendo equações quadráticas por fatoração”, disponível em: bityli.com/resolvendo-quadraticas (acesso em: 7 jun. 2022).

Proponha também alguns problemas que possam ser modelados por equações completas do 2º grau e resolvidos por fatoração ou por cálculo mental, por exemplo: “O quadrado de um número real somado com o seu quádruplo resulta em -3. Qual é esse número?”

Resposta esperada: $x^2 + 4x + 3 = 0 \;\; >> \;\; (x + 1).(x + 3) = 0 \;\; >> \;\; (x + 1) = 0$
ou $(x + 3) = 0 \;\; >> \;\; x = -1$ O ou $x = -3$, ou seja esse número pode ser -1 ou -3.

Resolvendo equações do 2º grau completas com base na soma e produto das raízes

A partir da exploração da forma fatorada realizada na etapa anterior, os estudantes serão convidados a observar algumas regularidades e terão contato com outra estratégia de resolução de equações completas do 2º grau: a relação entre os coeficientes e a soma e o produto das raízes de uma equação.

Diga que agora vão ampliar a discussão da forma fatorada de uma equação do 2º grau para "descobrir" outra estratégia de resolução. Disponibilize para os estudantes as orientações e a tabela a seguir. Complete o que você já sabe na tabela a seguir. Observe que algumas informações você poderá encontrar nas duas tabelas anteriores. As respostas esperadas estão destacadas em vermelho.

EQUAÇÃO	A	B	C	FORMA FATORADA	RAÍZES DA EQUAÇÃO ($X_1 . X_2$)	SOMA DAS RAÍZES ($X_1 + X_2$)	PRODUTO DAS RAÍZES
$x^2 + 5x + 4 = 0$	1	5	4	$(x + 1).(x + 4) = 0$	-1 e -4	-5	4
$x^2 + 2x + 1 = 0$	1	2	1	$(x + 1).(x + 1) = 0$ ou $(x + 1)^2 = 0$	-1 (duas raízes iguais)	-2	1
$x^2 - 3x + 2 = 0$	1	-3	2	$(x-1). (x-2) = 0$	1 e 2	3	2
$x^2 - 6x + 5 = 0$	1	-6	5	$(x-1). (x-5) = 0$	1 e 5	-6	5
$x^2 - 7x + 12 = 0$	1	-7	12	$(x-3).(x-4) = 0$	3 e 4	7	12
$x^2 + 11x + 24 = 0$	1	11	24	$(x+3)(x+8) = 0$	-3 e -8	-11	24

Em seguida, observe as equações e responda:

- Identificam alguma regularidade em todas as equações?
- Existe alguma relação entre o coeficiente b e a soma das raízes da equação ($x_1 + x_2$)? Explique.
- Existe alguma relação entre o coeficiente c e o produto das raízes da equação ($x_1 . x_2$)? Explique.

Provavelmente os estudantes inicialmente preencham apenas as 3 primeiras linhas da tabela, pois eles possuem informações sobre essas equações nas tabelas anteriores.

Como regularidades, espera-se que identifiquem que:

- Todas as equações apresentadas são do 2º grau e são completas;
- Todas as equações apresentadas possuem a = 1;
- A soma das raízes é igual a -b, isto é, ($x_1 + x_2$) = -b;
- O produto é igual a c, isto é, $x_1 . x_2 = c$.

Oriente os estudantes a registrar as regularidades encontradas e incentive-os a voltar na tabela para completar o que ainda está faltando, utilizando essas regularidades.

No final da proposta, discuta coletivamente as respostas encontradas.

Se achar necessário, apresente mais algumas propostas envolvendo todas as estratégias de resolução de equações já estudadas. Incentive o estudante a refletir e analisar as características de cada equação para escolher a estratégia que seja mais adequada.

Atenção para a avaliação!

Peça aos estudantes que retomem os registros realizados no final do Momento 2 desta atividade da SD, no quadro Atenção para a Avaliação. Lembre-os de que, naquele momento, eles foram desafiados a registrar (em um e-mail) tudo que já sabiam sobre resolução de equação do 2º grau. Peça que leiam os registros e reflitam sobre os seus conhecimentos atuais. Questione: *E agora? O que vocês já sabem sobre esse tema?* Convide-os a completar/ampliar seus registros. Eles podem utilizar caneta de outra cor para que percebam o quanto avançaram com suas aprendizagens. Destaque as aprendizagens deste período e mostre como, ainda que cada pessoa aprenda em um ritmo e tenha mais facilidade com um tipo de conteúdo ou conhecimento, todos são capazes de aprender e desenvolver habilidades diversas.

Uma fórmula para resolver equações do 2º grau

Inicie a proposta exibindo o vídeo “Esse tal de Bhaskara”, disponível em: bityli.com/yt-baskhara (acesso em: 1 jul. 2022). Caso não tenham acesso ao vídeo na escola, eles podem assistir antes em casa ou na casa de algum colega. Peça aos estudantes que anotem os pontos interessantes do vídeo, o que mais chamou sua atenção, o que eles aprenderam que ainda não sabiam.

Durante a exibição do vídeo, faça algumas pausas para que possam fazer suas anotações. No final, peça que socializem suas observações e converse sobre as questões importantes do vídeo, por exemplo:

- Quais as contribuições das civilizações antigas (entre os egípcios, babilônios, gregos, hindus e europeus) para resolução da equação do 2º grau?
- Quais as semelhanças entre as estratégias de resolução que você já conhece e as que foram apresentadas no vídeo?

Em seguida, amplie a conversa, peça aos estudantes que contem o que já aprenderam sobre equações do 2º grau. Pergunte como resolveriam cada uma das equações abaixo e peça que expliquem o porquê da escolha de cada estratégia escolhida. O foco não é a resolução, mas sim a identificação das características da equação e a escolha do método mais adequado.

Analisar uma equação e decidir sobre a forma mais prática de resolvê-la é tão importante quanto saber a fórmula de Bhaskara.

$x^2 - 25 = 0$	$x^2 - 4x = 0$	$x^2 - 3x + 2 = 0$	$x^2 + 4x - 21 = 0$

Verifique se há discordâncias, sempre incentivando a justificativa. Espera-se que identifiquem que a equação $x^2 - 25 = 0$ é uma equação incompleta com $b = 0$ e que, nesse caso, é possível “isolar” o x para determinar a raiz. Já a equação $x^2 - 4x = 0$ é incompleta com $c = 0$ e, nesse caso, a fatoração é um método muito eficaz.

Já a terceira equação é completa, possui a = 1, mas não é difícil encontrar dois números cuja soma é 3 e cujo produto é 2, porém pode acontecer de os estudantes encontrarem alguma dificuldade para resolvê-la por uma das estratégias já estudadas. Relembre com eles a estratégia de resolução que envolve a soma e o produto de duas raízes da equação.

É esperado que os estudantes não consigam resolver a equação $x^2 + 4x - 21 = 0$ pelas estratégias já estudadas. Anuncie então que, para esses casos existe, outra estratégia de resolução: a fórmula de Bhaskara. Pergunte se algum estudante já conhece essa fórmula, o que sabe sobre ela e quando é indicado que ela seja utilizada.

Anuncie que, neste momento, quem já conhece essa estratégia de resolução vai aprofundar sua aprendizagem e quem não conhece ainda vai ter a oportunidade de estudá-la.

Você pode iniciar o momento propondo uma aula invertida. Retome com os estudantes que essa metodologia já foi utilizada anteriormente e possibilite que eles resolvam as propostas com autonomia, protagonismo e no seu ritmo. O trabalho com metodologias ativas, como a aula invertida, está relacionado ao desenvolvimento das Competências Gerais 7, 9 e 10 da BNCC, que se relacionam com desenvolver diálogo, argumentação, empatia, autoconhecimento e autogestão.

Relembre da importância do estudante se preparar com antecedência, organizando os materiais necessários e fazendo gestão do seu tempo antes da aula marcada para participar das discussões que serão realizadas com o grupo. Encaminhe as propostas de trabalho a seguir para o momento que antecede a aula. O estudante pode se preparar em casa ou mesmo na escola. Disponibilize o roteiro de estudos do Anexo 7.

Obs.: Caso os estudantes não tenham acesso aos vídeos, você pode entregar, na versão impressa, o texto "Revisão da fórmula de Bhaskara", disponível em: bityli.com/yc-revisao-baskhara (acesso em: 11 ago. 2022) e adaptar as questões apresentadas para o vídeo.

Proposta de trabalho para a aula invertida

1. Assista ao vídeo disponível em: bityli.com/baskhara (acesso em: 16 maio 2022). Você pode assisti-lo quantas vezes achar necessário. Em seguida, reflita sobre as seguintes questões e registre suas conclusões:

a) Qual a equação do 2º grau apresentada inicialmente? Nessa equação, qual o valor dos coeficientes a, b e c?
Resposta: $x^2 + 4x - 21 = 0$, a = 1, b = 4 e c = 21.

b) Você poderia resolver essa equação utilizando um dos métodos que você já estudou? Espera-se que o estudante utilize a forma fatorada ou a soma e o produto das raízes e conclua que: $(x + 7).(x - 3) = 0$ ou então: a soma das raízes é -4 e o produto é -21. Logo, as raízes são -7 e 3.

c) Qual a fórmula de Bhaskara? $x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}$

d) Assim como foi feito no vídeo, resolva a equação $x^2 + 4x - 21 = 0$ utilizando a fórmula.

e) Você resolveu a mesma equação com duas estratégias diferentes. As respostas encontradas foram as mesmas? Sim.

f) Qual das estratégias você achou mais fácil?
Resposta pessoal.

g) Em que situações você acha mais adequado utilizar a fórmula de Bhaskara? Possível resposta: quando a equação é completa, não é muito fácil resolver por soma e produto ou por fatoração.

2. Assista ao vídeo disponível em: bityli.com/exemplo-baskhara (acesso em: 11 ago. 2022) e explique como foi resolvida a equação $-x^2 + 8x = 1$ nesse vídeo.

3. Pronto você concluiu sua tarefa! Agora junte suas anotações, suas conclusões e suas dúvidas e traga para a aula do dia xx/xx/xxxx. Com seus colegas e professor/a, você poderá solucionar as dúvidas, contar suas descobertas e avançar com suas aprendizagens.

Se você quiser usar outro canal para estudar, não há problema. Apenas anote o nome/endereço para que possamos analisar coletivamente essa opção e compartilhar com a turma.

Professor/a, caso não seja possível que o estudante assista aos vídeos em casa e se a escola tiver acesso à internet, eles podem assistir na escola, ou, caso não exista acesso à internet, separe alguns livros didáticos ou textos que explorem a fórmula de Bhaskara e a resolução de equações completas com essa estratégia para que pesquisem no momento anterior a aula.

Após a realização da proposta, no momento da aula, converse com os estudantes sobre o vídeo, peça que contem suas aprendizagens, o que acharam mais fácil, o que acharam difícil, se ainda ficaram com dúvidas. Se necessário, resolva no quadro a equação $x^2 + 4x - 21 = 0$ utilizando a fórmula e peça aos estudantes que expliquem cada uma das passagens. Abra um espaço para que todos apresentem dúvidas e faça os alinhamentos necessários. Se necessário, comente também a resolução da equação $-x^2 + 8x = 1$.

Para exercitar as aprendizagens, proponha que resolvam os exercícios online, disponíveis em: bityli.com/exercicio-baskhara (acesso em: 11 ago. 2022).

Sistematize a fórmula de Bhaskara, mas enfatize que, apesar de resolver qualquer equação do 2º grau, nem sempre ela é a estratégia mais fácil, pois envolve muitos cálculos e pode levar os estudantes que não se atentarem a cometer alguns erros.

Para finalizar a etapa e desenvolver a fluência dos estudantes, apresente mais equações que podem ser selecionadas de livros didáticos do 9º ano e intercale também alguns problemas que possam ser modelados e resolvidos por equações do 2º grau. Oriente-os a resolver pela estratégia que achar mais adequada. Veja o exemplo:

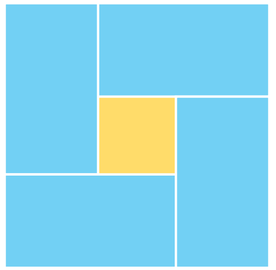
EXERCÍCIO 1

G1 - CP2 - adaptado

Você pode convidar dois amigos para analisar esse problema com você e tenha sua calculadora por perto, pois ela pode lhe ajudar com os cálculos.

Nas salas de aula de um colégio serão colocados pisos conforme a figura a seguir. Cada piso é formado por quatro retângulos iguais de lados 10 cm e (x+10) cm respectivamente e um quadrado de lado igual a x cm.

Sabendo-se que a área de cada piso equivale a 900 cm^2, qual é a medida do lado do quadrado menor que se encontra no centro do piso?



Resposta:

Uma das opções é fazer cálculo mental: se a área do quadrado é 900cm^2, então a medida do seu lado é 30cm, dessa forma, temos: e x + x + 10 = 30, logo x = 10, que é a medida do lado do quadrado menor.

Outra estratégia de resolução é modelar o problema pela equação:

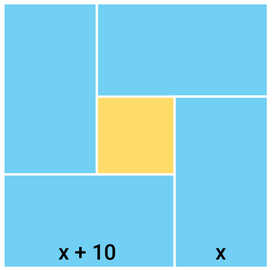
(x + 10) .x.4 (área de 4 retângulos) + x^2 (área do quadrado menor) = 900

$4x^2 + 40x + x^2 = 900$

$5x^2 + 40x - 900 = 0$

$x^2 + 8x - 180 = 0$

Utilizando a fórmula resolutiva, obtém-se x = 10 ou x = -18, mas como x é a medida do lado do quadrado, ele não pode ser negativo.



Professor/a, valorize a diversidade de caminhos na busca da resolução, assim como as diferentes formas para resolver uma equação do 2º grau, pois, nessas situações, os estudantes confrontam seus saberes com os de seus colegas, com o saber do livro e com o do professor. Nesse processo, percebem se sua forma de pensar e de aprender a matemática está correta, tomam consciência do que sabem e do que falta saber e conhecem a si mesmos. Isso gera autonomia e os tornam protagonistas de suas escolhas e de seus projetos de vida.

Não esqueça de contemplar equações com 2 raízes distintas, com duas raízes iguais e com nenhuma raiz real. Proponha também problemas que possam ser modelados por equações quadradas. Você pode selecionar atividades do material didático.

Para se aprofundar

Explore a dedução da fórmula resolutiva da equação quadrática, sugerimos propor aos estudantes as atividades disponíveis no plano de aula da Nova Escola: "Dedução da fórmula resolutiva da equação quadrática", de Lais Aline Casagrande Pires de Melo, disponível em: bityli.com/formula-resolutiva (acesso em: 26 maio 2022).

Atenção para a avaliação!

1. Peça aos estudantes que retomem os registros realizados Momento 2 desta SD, no quadro **Atenção para a Avaliação**. Lembre-os de que, naquele momento, eles foram desafiados a ampliar os registros (em um e-mail) sobre tudo que já sabiam sobre resolução de equação do 2º grau. Peça que leiam os registros e reflitam sobre os seus conhecimentos atuais. Questione: *E agora? O que vocês já sabem sobre esse tema?* Convide-os a completar/ampliar seus registros. Eles podem utilizar caneta de outra cor para que percebam o quanto avançaram com suas aprendizagens. Esses registros podem dar pistas do que os estudantes já sabem e quais os pontos que eles ainda precisam avançar.

Com base nessas observações, você poderá propor diferentes intervenções, como agrupar os estudantes de acordo com suas dificuldades, convidar estudantes que já avançaram para serem tutores dos que ainda precisam avançar, entre outras. Outra boa sugestão é a formação de grupos de estudo heterogêneos, formados com base no nível de aprendizagem de cada estudante.

Para saber mais sobre essa estratégia, acesse: bityli.com/grupos-heterogeneos (acesso em: 30 jun. 2022).

Atenção para a avaliação!

2. Peça que, individualmente, resolvam a seguinte proposta: *Pensei em um número, elevei-o ao quadrado e somei o seu dobro. O resultado obtido foi 3. Em que número pensei?*

Resposta esperada: $x^2 + 2x = 3 \quad >> \quad x = 1$ ou $x = -3$

Ao final dessa proposta, avalie e registre suas observações em relação aos estudantes no que diz respeito a:

- Utilizar adequadamente a linguagem matemática.
- Modelar o problema utilizando corretamente a linguagem algébrica.
- Escolher uma estratégia adequada e resolver corretamente a equação do 2º grau.
- Persistir na resolução de problemas.

Dê um feedback para os estudantes indicando em quais pontos já avançaram e o que é possível fazer para avançar naqueles que ainda merecem atenção. Oriente-os a fazer o levantamento desses pontos e retomá-los em um momento de estudo individual: leia sobre o tema, retome as suas anotações do lapbook, resolva alguns exercícios e anote as dúvidas encontradas para depois conversar sobre elas com algum colega que já avançou neste tema ou mesmo com o professor em um momento oportuno.

Bora se preparar?!

Professor/a, para ampliar as aprendizagens dos estudantes e permitir que pensem mais a respeito dos temas estudados nesta 2ª atividade da SD, peça que resolvam as questões a seguir. Eles podem trabalhar em duplas ou trios. Oriente-os a consultar o lapbook, pois as anotações realizadas nesse material contribuirão efetivamente com a resolução das propostas.

Caso surja alguma dúvida, eles poderão discuti-las com seus colegas e professor/a na próxima aula.

EXERCÍCIO 1

(G1 - CPS) Suponha que um terreno retangular de área 4.225 km² será delimitado para se tornar uma nova Reserva Extrativista. Se o comprimento do terreno exceder em 100 Km sua largura (x), uma equação que permite determinar essa largura (x) é:

a) $x^2 + 100x + 4.225 = 0$
b) $x^2 - 100x + 4.225 = 0$
c) $x^2 + 100x - 4.225 = 0$
d) $x^2 + 4.225x - 100 = 0$
e) $x^2 - 4.225x + 100 = 0$

Gabarito: C

EXERCÍCIO 2

(ESPM) Quando eu nasci, meu pai tinha 32 anos. Hoje, o produto das nossas idades é igual a 900. A soma das nossas idades atuais é igual a:

a) 72
b) 68
c) 64
d) 83
e) 75

Gabarito: B

EXERCÍCIO 3

ID da Questão: 2070.
Código do Descritor: M412 – Questões – MT – Fase 2

Um polinômio Q(x) do 2º grau tem raízes iguais a -7 e 2. Das expressões abaixo, a que pode representar Q(x) é:

a) (x - 7)(x - 2)
b) (x + 7)(x + 2)
c) (x -7)(x + 2)(x + 5)
d) (x - 7)(x + 2)
e) (x + 7)(x - 2)

Gabarito: E

EXERCÍCIO 4

D da Questão: 1792.
Código do Descritor: M480 – Questões – MT Fase 1

O produto da idade de Rafael hoje pela idade que ele terá daqui a 5 anos é 266. Quantos anos Rafael terá daqui a 5 anos?

a) 14
b) 5
c) 9
d) 12
e) 19

Gabarito: E

EXERCÍCIO 5

ID da Questão: 222.
Código do Descritor: M694 – Questões – MT – Fase 1 (adaptado)

Das equações abaixo, qual tem raízes iguais a -4 e a 5?

a) $x^2 - x - 20 = 0$
b) $x^2 + x - 20 = 0$
c) $x^2 - x + 10 = 0$
d) $x^2 + x + 20 = 0$
e) $x^2 - x - 10 = 0$

Gabarito: A

EXERCÍCIO 6

(IFSC - adapt.)
Quanto à equação $x^2 - 4x + 3 = 0$,é correto afirmar que:

a) A soma de suas raízes é igual a – 4.
b) Tem duas raízes iguais.
c) Tem duas raízes distintas.
d) Não tem raízes reais.
e) O produto de suas raízes é nulo.

Gabarito: C

Conectando sequências

Conexões com o Material do Volume I e outras explorações

As propostas apresentadas na atividade 1 desta sequência têm como foco inicial a ampliação do conhecimento dos estudantes a respeito dos conjuntos numéricos, propondo o desenvolvimento da habilidade EF09MA02 - Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica. Esse tema é considerado conhecimento prévio necessário para o desenvolvimento das habilidades EF09MA09 - Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, para resolver problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau; e EF09MA14 - Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras, ambas contempladas nesta sequência didática.

Para avançar no trabalho com esse tema, propomos que você explore a SD2 do Material do Volume I, em que é proposto o desenvolvimento da habilidades EM13MAT502 - Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo y = ax2; e EM13MAT503 - Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

Novamente se faz presente a articulação entre as aprendizagens dos anos finais do Ensino Fundamental com as aprendizagens focais do Ensino Médio. Essa é a essência da recomposição da aprendizagem: escolher boas propostas de atividade que permitam desenvolver simultaneamente conhecimentos de diferentes anos escolares.

Esse processo diferencia a recomposição da recuperação, que deve acontecer após os estudantes terem tido chance de aprender, e permite que, de certa forma, possamos avançar nas aprendizagens e garantir que nas séries do Ensino Médio, eles aprendam o máximo possível daquilo que é direito de aprendizagem apresentado nas habilidades e nas competências pela BNCC.

Atividade extra: cálculo mental

Uma primeira ideia que nos ocorre quando falamos em “cálculo mental” é de fazer contas “de cabeça”, sem uso de papel, e, em geral, imagina-se que seja feito muito rapidamente, com destreza. No entanto, nesta proposta, queremos ampliar um pouco essa concepção de cálculo mental incluindo a análise da situação e a escolha da estratégia mais adequada. Nessa perspectiva, o cálculo mental pode contar com o apoio escrito.

Essa proposta pode ser realizada em duplas para que discutam, analisem e façam boas escolhas. Nesse momento, você não interfere nem faz comentários de qualquer tipo. Procure garantir que eles tenham tempo para dialogar e foquem na proposta. Qualquer comentário, ainda que carinhoso ou divertido, atrapalha a concentração que é necessária para eles.

Resolva as seguintes equações:

a) $x^2 - 5x = 0$

b) $-x^2 - 5x = 0$

c) $5x^2 + x = 0$

d) $x^2 = 9x$

e) $x^2 - 9 = 0$

f) $25x^2 = 1$

g) $x^2 - 64 = 0$

h) $-7x^2 + 28 = 0$

i) $(x - 7).(x - 3) = 0$

j) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

k) $x^2 - 4x - 12 = 0$

l) $x^2 + 6x + 9 = 0$

m) $3x^2 + 4x + 2 = 0$

n) $y^2 - 16y + 64 = 0$

o) $6x^2 - x - 5 = 0$

p) $x^2 - 6x - 16 = 0$

Depois do tempo combinado, convide os estudantes a socializar as estratégias utilizadas para resolver cada equação, explicando o porquê da sua escolha.

O foco não é corrigir erros e acertos, mas, sim, olhar para a decisão e para a justificativa do tipo de estratégia escolhida.

Atividade 3

ATIVIDADE 3

ESTUDANDO AS FUNÇÕES DO 2º GRAU

Foco: o foco da atividade é a construção do conceito da função do 2º grau.

Tempo sugerido: 4 horas/aula

Materiais necessários:

- Uma cópia do **Anexo 4** para cada estudante. Pode ser uma versão impressa ou projetada para os estudantes.
- Malha quadriculada: uma folha para cada estudante.
- Acesso ao aplicativo bityli.com/segundo-grau. Caso o acesso não seja possível, providenciar a versão impressa de diferentes gráficos de funções do 2º grau para todos os estudantes.
- Uma cópia do **Anexo 5** (kit com regras e cartas do jogo): uma para cada equipe.

Pensando na progressão das aprendizagens pautadas nas habilidades do Ensino Fundamental EF09MA09 (Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau) e EF09MA06 (Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis), o foco é a realização do estudo das funções do 2º grau,

previstas para serem desenvolvidas no Ensino Médio, com base nas habilidades EM13MAT302 (Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais) e EM13MAT502 (Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$).

Uma conversa inicial

A aula de Matemática, voltada para um enfoque problematizador, exige do/a professor/a planejamento e uma condução organizada, que respeite o tempo e a possibilidade de trabalho pessoal de cada estudante, seja individualmente ou em grupos. Assim, os estudantes poderão se envolver nas atividades e ter responsabilidade e organização para pensar, analisar e discutir.

1 aula:

Identificando funções do 2º grau

Gestão da aula

Para melhor gerir essa etapa da sequência didática:

- Compartilhe com os estudantes o que será realizado na aula. Faça isso colocando em itens as principais atividades previstas por você. Ao final da aula, podem voltar a elas e analisar o que fizeram, o que não e o porquê. Isso favorece a organização de todos para o trabalho.

- Dê tempo e permita que os estudantes observem as sequências e tentem identificar padrões e regularidades. Não interrompa com nenhum comentário específico, circule na classe para identificar as estratégias utilizadas.

- Evite chamar a atenção dos estudantes em voz alta. Isso desconcentra a classe e pode constranger o estudante. Se precisar fazer algum alerta, aproxime-se do jovem e fale diretamente com ele. A experiência mostra que, ao se sentir respeitado, mas, ao mesmo tempo, saber que o adulto está atento, o jovem modifica seu comportamento porque é chamado a ser corresponsável por sua aprendizagem e de seus colegas.

- Depois de pensar individualmente, eles podem trabalhar em grupo de, no máximo, 4 alunos para discutir como pensaram para resolver as atividades.

- Convide dois ou três estudantes para explicar suas soluções, de modo que todos possam identificar semelhanças, diferenças ou mesmo eventuais equívocos nas soluções encontradas.

Disponibilize uma cópia do **Anexo 4** para cada estudante.

Pode ser uma versão impressa ou projetada para os estudantes.

Neste caso, peça que façam todos os registros no caderno conforme sugestões anteriores, e que, inicialmente, trabalhem individualmente, reunindo-se depois em grupos com 3 ou 4 componentes para conversarem sobre suas descobertas.

Respostas esperadas:

1. Espera-se que os estudantes percebam que o número de peças (p) é o número da casa na sequência (n) somado com 1 unidade.

Casa	Número de peças
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7
7	8
8	9
9	10
10	11
n	$p = n + 1$

2. Espera-se que percebam que o número de peças (p) é o número da casa na sequência (n) elevado ao quadrado, somado com uma unidade. Eles podem usar outras letras para representar as variáveis neste caso.

Casa	Número de peças
1	2
2	5
3	10
4	17
5	26
6	37
7	50
8	65
9	82
10	101
n	$p = n^2 + 1$

A partir do que fizerem juntos, escreva no quadro as duas leis de formação das sequências ($p = n + 1$ e $p = n^2 + 1$) e peça para identificarem semelhanças e diferenças entre elas. Espera-se que identifiquem que a diferença está no expoente do n (número de peças). Foque na 1ª lei e faça oralmente uma retomada das aprendizagens dos estudantes sobre função do 1º grau. Apresente algumas questões norteadoras: *Vocês já estudaram essas funções, quem lembra alguma característica da escrita algébrica desse tipo de função? Quem lembra como é o gráfico deste tipo de função? Como encontrar a raiz (ou zero) dessa função?* Se eles não se lembrarem, sugira que consultem os registros que fizeram durante o estudo desse tema e façam juntos esta retomada.

Em seguida, retome a expressão obtida na 2ª lei ($p=n^2+1$) e sua característica principal: o expoente 2 do n (número de peças). Peça aos estudantes que pesquisem, em livros didáticos, outras situações que podem ser representadas com essa característica. Exemplos de respostas esperadas:

- A área do quadrado cuja medida dos lados é representada por x: $A = l^2$.
- Um foguete foi lançado de uma plataforma e sua altura h, em metros, t segundos, após o seu lançamento é dada pela função $h = -t^2 + 20t + 300$.
- Um projétil é lançado por um canhão e a sua trajetória pode ser representada pela função $y=-x^2 + 150x$.

Peça que escrevam no quadro as funções obtidas na pesquisa e que identifiquem semelhanças e diferenças entre elas. Exemplos de respostas esperadas:

- Semelhanças: todas têm 2 como maior expoente da letra (variável) e todas têm 2 letras diferentes (variáveis).
- Diferenças: elas usam letras diferentes; uma tem 1 termo do lado direto, a outra tem 2 termos e a outra tem 3 termos, entre outras.

Aproveite o momento para sistematizar função do 2º grau: é toda função do tipo $y = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Peça que retomem as funções encontradas no momento da pesquisa, que analisem se elas são exemplos de função do 2º grau e que identifiquem os coeficientes a, b e c em cada uma delas.

Construa, coletivamente, uma tabela com essas informações no quadro. Veja um exemplo de resposta esperada:

Função do 2º grau	a	b	c
$A = l^2$	1	0	0
$h = -t^2 + 20t + 300$	-1	20	3
$y = -x^2 + 150x$	-1	150	0

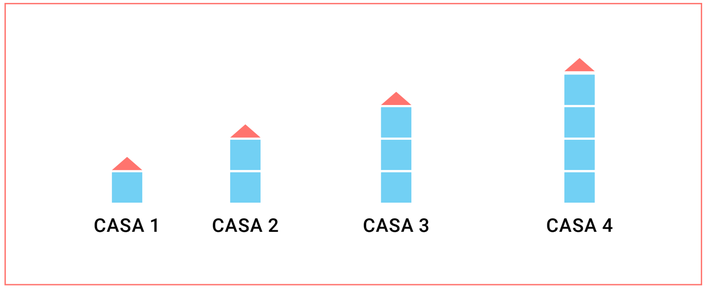
Para finalizar, convide os estudantes a registrar no lapbook tudo que aprenderam até aqui.

2 aulas:

Ampliando a exploração da representação gráfica das funções do 2º grau

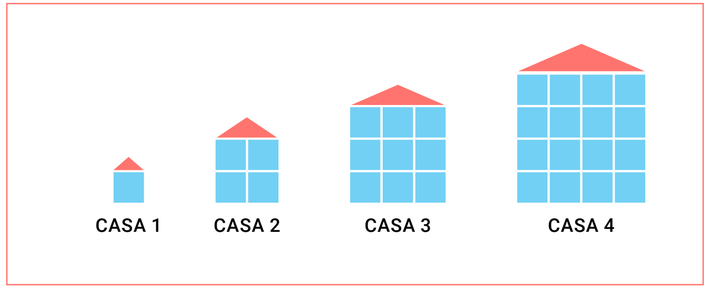
Para iniciar o estudo dos gráficos das funções do 2º grau, convide os estudantes a retomar as duas sequências de figuras estudadas no momento 1 dessa atividade. Peça que retomem também suas respectivas leis de formação e a tabela construída para cada sequência.

Sequência 1



Casa	Número de peças
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7
7	8
8	9
9	10
10	11
n	$p = n + 1$

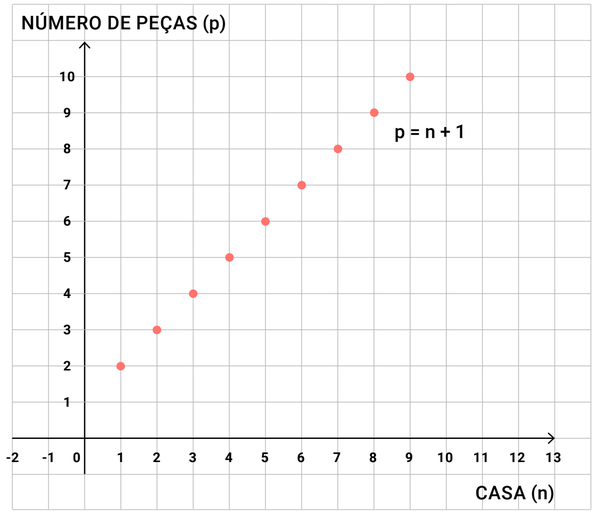
Sequência 2



Casa	Número de peças
1	2
2	5
3	10
4	17
5	26
6	37
7	50
8	65
9	82
10	101
n	$p = n^2 + 1$

LEI DE FORMAÇÃO:

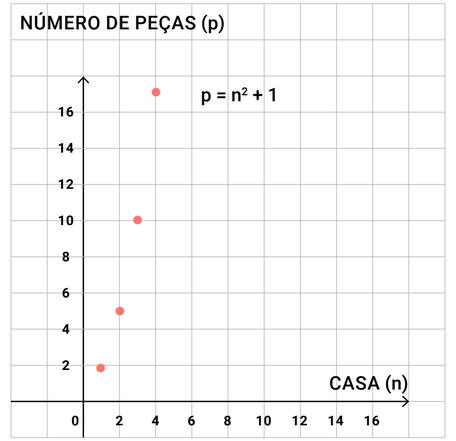
$p = n^2 + 1$



Organize os estudantes em duplas, disponibilize papel quadriculado e convide-os a construir os gráficos das funções que representam as leis de formações dessas sequências. Eles podem utilizar as informações contidas nas tabelas já construídas. Em seguida, peça que identifiquem semelhanças e diferenças entre os gráficos construídos. Caso necessário, retome com os estudantes que os gráficos dessas funções são formados apenas por pontos e não podem assumir valores negativos devido ao fato de estarmos apenas usando números pertencentes ao conjunto dos Números Naturais. Abra uma roda de conversa para socializar as conclusões das duplas.

Respostas esperadas:

Nesse momento, talvez os estudantes apenas identifiquem que, no primeiro gráfico, que envolve uma função do 1º grau, os pontos estão alinhados; e que, no segundo, uma função do 2º grau, os pontos não estão alinhados. Convide-os então para aprofundar o estudo dos gráficos da função do 2º grau, realizando a proposta a seguir.



Neste momento, o foco é o reconhecimento do gráfico das funções do 2º grau, de suas características e de seus elementos. Como o foco é a exploração, e não a construção, sugerimos que, se possível, os estudantes acessem o aplicativo disponível em: www.geogebra.org/m/dkkjkpv4. Peça que, utilizando os controles deslizantes, representem algumas funções do 2º grau, como: $f(x) = x^2 + 4$, $f(x) = x^2 - 4$, $f(x) = x^2$, $f(x) = - x^2$.

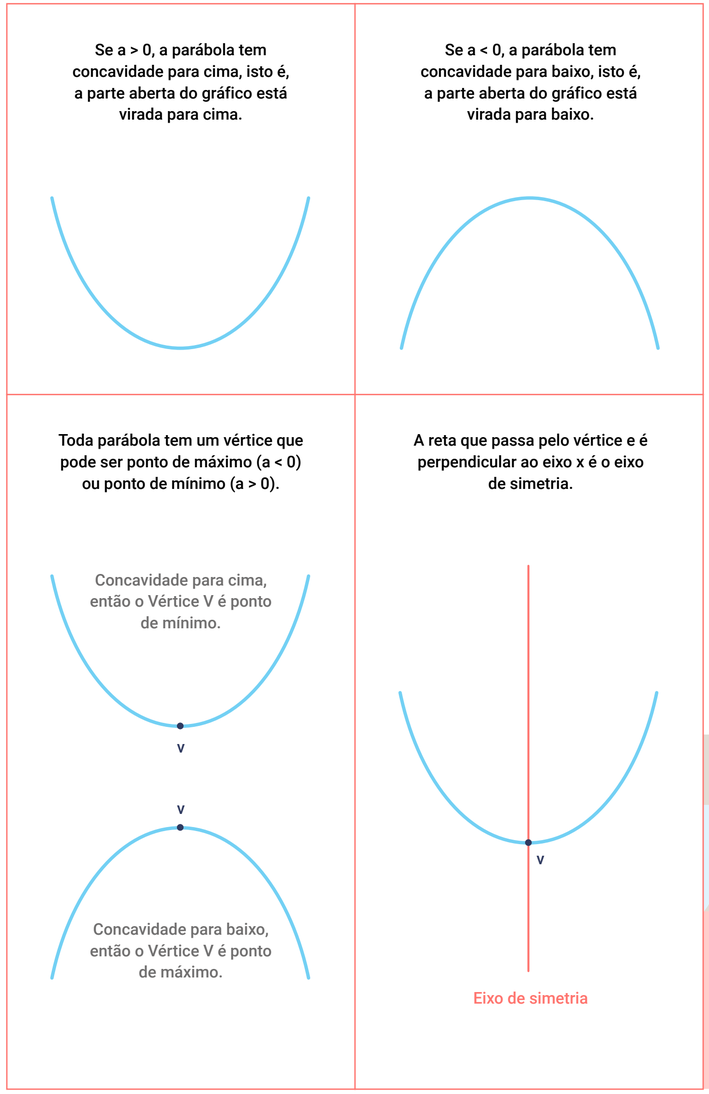
Se o acesso ao aplicativo não for possível, disponibilize gráficos impressos de diferentes funções do 2º grau para que os estudantes possam fazer a análise. Apresente algumas questões norteadoras para as observações, por exemplo:

- Qual o "formato" dos gráficos?
- Fixe um valor para "b" e para "c" e mude o valor de "a". O que você observa quando a > 0? E quando a < 0?
- Esses gráficos são crescentes? São decrescentes ou são as duas coisas?
- É possível identificar no gráfico um ponto com a maior ordenada (y)? Qual é esse ponto?
- É possível identificar no gráfico um ponto com a menor ordenada (y)? Qual é esse ponto?
- É possível traçar algum eixo de simetria?
- Identifique as regularidades. Não se esqueça de registrar suas observações.

Depois das explorações, abra uma roda de conversa, vá sistematizando as regularidades encontradas. Para este momento, você pode preparar, com antecedência, um slide contendo as imagens para ilustrar cada uma das situações ou mesmo utilizar figuras de livros didáticos. Peça que os estudantes registrem suas observações/conclusões no lapbook e que enriqueçam esses registros com esboços de parábola para representar as situações, pois, nesse momento, as imagens são muito importantes.

- A representação gráfica é sempre uma parábola, que é a linha que define o gráfico.
- Se a > 0, a parábola tem concavidade para cima, isto é, a parte aberta do gráfico está virada para cima.
- Se a < 0, a parábola tem concavidade para baixo, isto é, a parte aberta do gráfico está virada para baixo.
- Toda parábola tem um vértice que pode ser ponto de máximo (a < 0) ou ponto de mínimo (a > 0).
- A reta que passa pelo vértice e é perpendicular ao eixo x é o eixo de simetria.

Para ampliar as aprendizagens, selecione do material didático exercícios e problemas que possam ser modelados por uma função do 2º grau. Eles podem utilizar os registros do lapbook para apoiar esse momento.



3 aulas:

Jogo: família das funções

Com a intencionalidade de aprofundar o estudo das funções do 1º e do 2º grau, propomos a realização do jogo Família das funções, cujo objetivo é formar famílias de quatro cartas.

Cada família é formada pela expressão algébrica da função, pelo esboço de seu gráfico e por duas outras cartas que contêm propriedades da função, a saber: pontos importantes do gráfico, comportamento do sinal da função. É possível formar, no máximo, dez famílias.

Gestão da aula

- Com antecedência, providencie kits com a regra e as cartas do Jogo (Anexo 5) um para cada grupo.
- Comece a aula escrevendo no quadro a rotina do dia (o que aprenderão, o nome do jogo, como eles deverão se organizar, materiais necessários, tempo para jogar, fechamento da aula e conversa a respeito do jogo). Peça que anotem no caderno.
- Peça que se organizem em grupos de quatro alunos.
- Esclareça que a aula do dia irá tratar, novamente, de um importante conteúdo da álgebra: as funções. Relembre-os da importância da leitura atenta para aprender e de anotar suas ideias e dificuldades para que você possa auxiliá-los a avançar.
- Proponha que os grupos leiam as regras do jogo e observem as cartas antes de começar a jogar. Se necessário, simule uma jogada para garantir que todos compreenderam as regras.
- Circule pelos grupos e observe os estudantes em ação. Anote as dúvidas, as observações interessantes, os questionamentos, para socializar com a turma no momento de discussão coletiva.
- Ao final, destine 10 minutos para conversarem a respeito do jogo, sobre as aprendizagens, as dúvidas e os pontos que você observou. Esta é a hora de você destacar como estão melhorando suas estratégias e indicar com clareza os pontos que ainda podem avançar e como fazer isso.

Trazemos o jogo como uma resolução de problemas, visto que, durante o jogo, surgem muitas situações em que os jogadores devem: fazer análises e escolhas amparados em conhecimentos matemáticos, aprimorar suas jogadas, argumentar para convencer seu time de seu ponto de vista e até pensar em estratégias para neutralizar ou dificultar a jogada seguinte do oponente de jogo. Nesses momentos, os estudantes estão enfrentando situações que envolvem resolução de problemas.

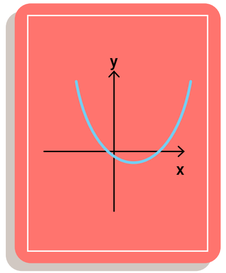
Desta forma, sugerimos que você planeje que um mesmo jogo seja explorado em 3 aulas, um em cada semana, com uma turma:

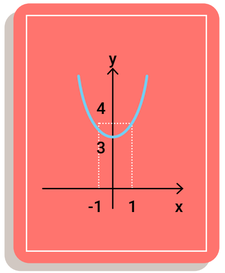
- 1ª vez que os estudantes jogam: o foco é jogar para conhecer as regras e as cartas e para elaborar as estratégias iniciais para vencer o jogo;

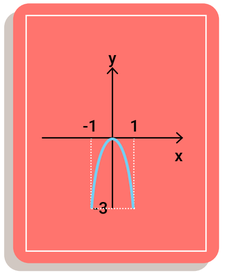
- 2ª vez que os estudantes jogam: os estudantes refinam suas estratégias e avançam na aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvidos no jogo. Após a realização do jogo, o professor pode apresentar algumas problematizações apoiadas em situações relacionadas a ele, permitindo que os estudantes ampliem suas reflexões, como no exemplo ao lado.

- 3ª vez que os estudantes jogam: o foco é que os estudantes avancem e sistematizem suas aprendizagens. Após a realização do jogo, o professor pode solicitar que os estudantes registrem todas as cartas de uma família de função que construíram durante o jogo, ou contem para um colega suas descobertas e aprendizagens, Vale lembrar que cada registro, oral ou escrito, é um exercício metacognitivo: ao registrar, o estudante fica com maior clareza daquilo que já sabe e o que ainda precisa estudar mais.

NA SUA VEZ DE JOGAR, RITA OBSERVOU AS CARTAS DA MESA E PERCEBEU QUE SÓ FALTAVA UMA CARTA PARA COMPLETAR UMA DAS SUAS FAMÍLIAS.







$y = 2x^2 - x$

É UMA FUNÇÃO DE 2º GRAU QUE NÃO POSSUI

O GRÁFICO DA FUNÇÃO PASSA PELO PONTO (0,0)

O GRÁFICO INTERCEPTA O EIXO y NO PONTO DE ORDENADA ZERO

ELA VIROU ESTA CARTA.
ELA CONSEGUIU FORMAR A FAMÍLIA?
EXPLIQUE!

Atenção para a avaliação!

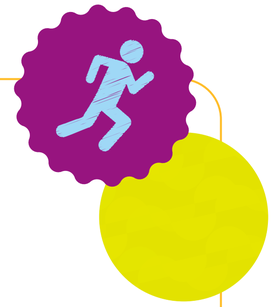
Professor/a, o momento do jogo também pode ter como foco a avaliação processual. Uma sugestão é, na segunda vez que jogam, após terminarem as jogadas, peça que individualmente organizem uma lista com o que já que aprenderam sobre funções do 1º e do 2º grau e quais os pontos que precisam cuidar para se sair ainda melhor no jogo. O/a professor/a recolhe esses registros para ler e anotar as considerações de cada estudante. No final do terceiro dia do jogo, o professor devolve o registro e propõe que cada estudante releia e, se necessário, faça alterações ou complemente suas anotações. O professor recolhe novamente e faz uma nova leitura para acompanhar os estudantes que avançaram e ajudar aqueles que ainda precisam avançar. Ele pode, por exemplo, nomear aqueles que já avançaram como tutores dos grupos que ainda precisam avançar, mas é preciso não fomentar o clima de cooperação entre os estudantes e tomar muito cuidado para que não surja uma competição entre os estudantes, no sentido de que um sabe mais do que o outro, então é um melhor do que o outro.

Durante esse processo, é necessário que você verifique também se as opiniões são apenas de natureza comportamental, repetindo slogans que ouvem repetidas vezes dos/as professores/as, como: prestar mais atenção na aula, estudar mais, ficar quieto durante as aulas. Converse que de nada adianta essas reflexões sem a iniciativa de tentar. Oriente-os a colocar a mão na massa, errar, corrigir o erro, enfim, ter uma postura cognitivamente ativa durante as aulas.

Conectando sequências

Conexões com o Material do Volume I e outras explorações

Como ampliação dos temas estudados, o/a professora também pode explorar a SD 2 do Material do Volume I, em que são apresentadas propostas para consolidar o desenvolvimento da habilidades: EM13MAT402 - Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais; EM13MAT502 - Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$; e EM13MAT503 - Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.



Bora se preparar?!

1 aula:

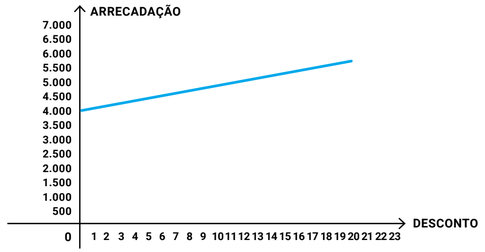
Professor/a, comunique ao estudante que chegou o momento de aprofundar as aprendizagens realizando as propostas a seguir. Você pode sugerir que trabalhem em duplas, que consultem o lapbook e que entreguem a resolução para você. Esses registros podem servir como instrumento de avaliação. Mas, além de avaliar, é muito importante você dar feedbacks para os estudantes: quais eram as aprendizagens esperadas, em quais pontos eles já atingiram as expectativas, em quais pontos eles ainda podem avançar. Apresente pistas de como pode ocorrer esse avanço: você pode, por exemplo, encaminhar vídeos, textos e exercícios do Khan Academy para os alunos que apresentaram dificuldade em resolver as propostas. Outra forma de apoio específico é organizar o grupo com mais dificuldade e dar um apoio especial a eles. Nesse caso, você pode fazer isso em uma aula na qual distribua atividades específicas para os estudantes com habilidades diferentes. Professor/a, agrupamento deve ser cuidadoso, para não expor nenhum estudante, desta forma, é necessário que essa organização diferenciada venha após um processo de autoavaliação claro, para que os estudantes tenham clareza dos pontos que já avançaram e daqueles que ainda merecem sua atenção.

EXERCÍCIO 1

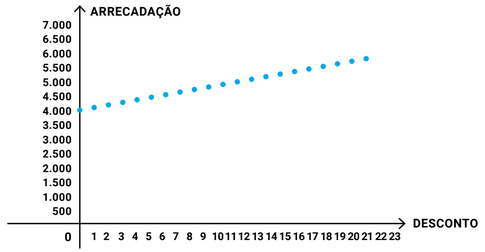
(ENEM) O administrador de um teatro percebeu que, com ingresso do evento a R$ 20,00, um show conseguia atrair 200 pessoas e que, a cada R$ 1,00 de redução no preço do ingresso, o número de pessoas aumentava em 40. Ele sabe que os donos do teatro só admitem trabalhar com valores inteiros para os ingressos, pela dificuldade de disponibilizar troco, e pretende convencê-los a diminuir o preço do ingresso. Assim, apresentará um gráfico da arrecadação em função do valor do desconto no preço atual do ingresso. O gráfico que mais se assemelha ao que deve ser elaborado pelo administrador é:

Gabarito: E

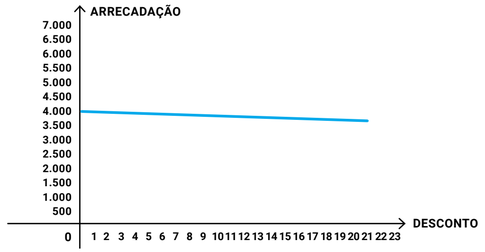
a)



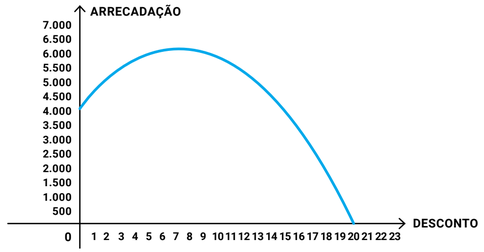
b)



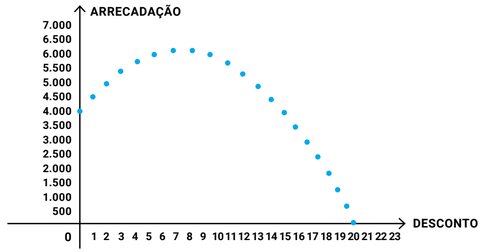
c)



d)



e)



EXERCÍCIO 2

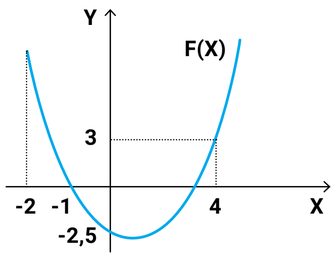
(ENEM) A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento (t = 0) e varia de acordo com a expressão $T^{(t)}=-t^2/4+400$ com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39°. Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

a) 19,0
b) 19,8
c) 20,0
d) 38,0
e) 39,0

Gabarito: D

EXERCÍCIO 3

Questão 1981, descritor M137, questões MT, fase 2.
Uma raiz da função f(x) abaixo é:



a) -2,5
b) 3
c) -1
d) -2

Gabarito: C

EXERCÍCIO 4

(ENEM) Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades variadas. O lucro obtido é dado pela expressão $L(x) = -x^2 + 12x - 20$, onde x representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo.
Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de bonés igual a

a) 4
b) 6
c) 9
d) 10
e) 14

Gabarito: B

EXERCÍCIO 5

CFTMG - adaptado) O lucro L de uma empresa é calculado em função do tempo t, em meses, pela função: $L(t) = 3t^2 - 39tx + 66$. Considerando essa função, o lucro da empresa é negativo entre o...

a) 2º e o 11º mês.
b) 4º e o 16º mês.
c) 1º e 4º e entre o 5º do 16º mês.
d) 2º e 5º e entre o 7º do 14º mês.
e) 1º e 4º e entre o 7º do 14º mês.

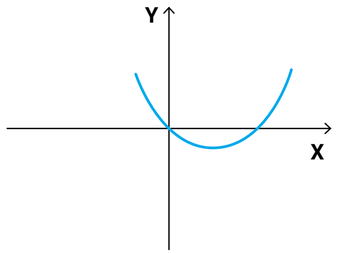
Gabarito: A

EXERCÍCIO 6

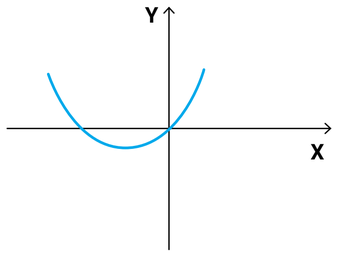
(UNICAMP - adaptado) Considere a função do 2º grau definida por $f(x)=ax^{(2)}+bx$definida para todo número real. Sabendo que a > 0 e b > 0, qual figura corresponde ao gráfico desta função?

Gabarito: B

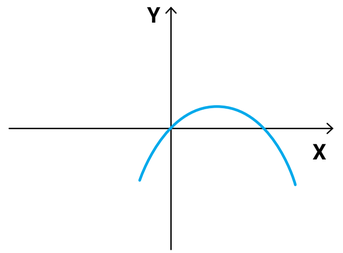
a)



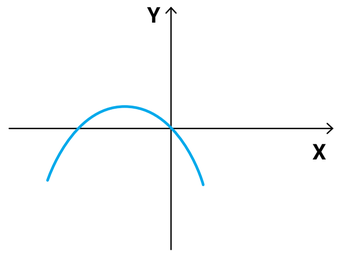
b)



c)



d)



Atividade 4

ATIVIDADE 4

ÂNGULOS, TRIÂNGULOS, TEOREMA DE PITÁGORAS E AS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Foco: retomar o estudo de ângulos e de triângulos, explorar o teorema de Pitágoras, as relações trigonométricas no triângulo retângulo e o cálculo dessas relações para os ângulos notáveis.

Tempo sugerido: 7 horas/aula

Materiais necessários:

- Tesoura, régua e 15 canudinhos para cada grupo.
- Uma cópia para cada grupo do **Anexo 9**. Pode ser a versão impressa ou a versão digital, para ser projetada para os estudantes.
- Acesso aos vídeos "Como usar o transferidor parte 1" e "Como usar o transferidor parte", disponíveis em: bityli.com/yt-transferidor e bityli.com/yt-transferidor2 (acessos em: 13 ago. 2022). Caso os estudantes não tenham acesso aos vídeos, providencie livros didáticos que abordem esse tema e disponibilize para pesquisa.
- Acesso ao vídeo "A história da Matemática", disponível em: bityli.com/yt-hist-mat (acesso em: 30 jun. 2022).
- Acesso ao quebra-cabeças disponível em: bityli.com/quebra-cabeca (acesso em: 23 maio 2022). Caso os estudantes não tenham acesso ao quebra-cabeças digital, é possível imprimir as peças e disponibilizar um conjunto de peças para cada dupla.
- Uma cópia do **Anexo 3** para cada dupla ou uma cópia para cada estudante, dependendo da organização da turma que você escolher para essa proposta.
- Malha quadriculada, régua e transferidor para todos os grupos ou acesso ao Geogebra, disponível em: bityli.com/Geogebra.

Para a construção do teodolito, os seguintes materiais para cada grupo:

- Um pedaço de cartolina grossa de 20cm x 20cm ou tampa de embalagem de papelão.
- Copo de plástico.
- Percevejo ou alfinete de cabeça ou parafuso e porca.
- Fita adesiva.
- Canudo de refrigerante.
- Palito de sorvete.
- Cópia de transferidor de 360°.
- Uma cópia para cada grupo do **Anexo 10** (versão impressa).

Você pode substituir os materiais da lista por outros similares!

Esta etapa da SD tem como foco desenvolver as habilidades relacionadas ao desenvolvimento do pensamento geométrico: visualização, desenho, verbais, lógicas e aplicadas, conforme teoria apresentada no texto "Geometria é mais que prova", de Alan Hofer, sugerido no início desta SD e disponível em: bityli.com/mais-que-prova (acesso em: 13 ago. 2022). Se você ainda não teve a oportunidade de fazer essa leitura, esse é o momento ideal para fazê-la.

Iniciamos a proposta retomando a condição de existência dos triângulos, relembrando os nomes dos diferentes tipos de triângulos; medindo ângulos e calculando a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo. O objetivo é consolidar o desenvolvimento das habilidades EF06MA25 - Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas; e EF07MA24 - Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a

soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° que são conhecimentos prévios importantes para o desenvolvimento do que propomos a seguir.

Na sequência, o foco é explorar o Teorema de Pitágoras com o objetivo de desenvolver as habilidades EF09MA13 - Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos; e EF09MA14 - Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes. O estudo deste teorema é muito importante para que os estudantes percebam que é possível calcular distâncias inacessíveis e também contribuir com a familiarização do estudante com os números irracionais. Ao propor as atividades apresentadas nesta etapa da sequência, também estamos desenvolvendo parcialmente a habilidade EM13MAT308 - Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos -, visto que o Teorema de Pitágoras é uma das relações métricas do triângulo retângulo.

Na próxima etapa desta atividade, o foco é construir o conceito das relações trigonométricas no triângulo retângulo seno, cosseno e tangente e estudar como essas relações se aplicam em ângulos notáveis (30o, 45o e 60o). Esses são conhecimentos essenciais para o desenvolvimento das habilidades EM13MAT308 e EM13MAT306 Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

Durante todo o percurso, o estudante é convidado a analisar as situações apresentadas, identificar regularidades, estabelecer relações, formular e validar hipóteses e tirar conclusões. Desta forma, a atividade contribui com o desenvolvimento da Competência Geral 2, proposta na BNCC: Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Gestão das aulas

Em vários momentos da SD, apresentamos como proposta diálogos com a sala toda para introduzir um tema (caráter diagnóstico) ou para fechar um estudo (caráter de sistematização das aprendizagens). Para atingir os objetivos propostos para esse momento, é muito importante uma boa gestão da aula por parte do/a professor/a.

- Garanta que todos os estudantes se sintam à vontade para compartilhar o que pensam e sentem.
- Quando houver divergências de opiniões, valorize todas, propondo uma atitude de respeito do grupo em relação à diversidade.
- Incentive os mais tímidos a se expressar e a compartilhar suas estratégias, seus pontos de vista etc.
- Enfatize a importância de registrar os pontos importantes, as conclusões, as aprendizagens nesses momentos de conversas coletivas.

5 aulas:

Revendo ângulos e triângulos

Um tema prioritário no currículo do Ensino Médio é a trigonometria. No entanto, muitas vezes ele não é simples para os estudantes simplesmente porque desconhecem algumas noções de geometria plana e medidas, como a noção de ângulo, algumas propriedades dos triângulos e o Teorema de Pitágoras, que estão diretamente envolvidas no estudo das relações trigonométricas.

Pensando nisso, optamos por retomar esses temas em algumas atividades especialmente planejadas para abordar os assuntos de forma lúdica e investigativa, visando que os jovens ampliem seu conhecimento geométrico e se preparem para a introdução da trigonometria, além de desenvolverem habilidades de pensamento geométrico. Você pode selecionar, baseado em resultados de avaliações diagnósticas já realizadas, quais das propostas apresentadas são adequadas para os seus estudantes neste momento.

PARTE 1 – ESSE TRIÂNGULO EXISTE?

Para essa etapa, os grupos precisarão de 15 canudos, régua, tesoura e papel para anotações. A meta é investigar a condição de existência dos triângulos com base nas propostas disponíveis na 1ª etapa do anexo 9.

Inicie com uma proposta individual: os estudantes devem ler os problemas, identificar o que é para fazer, levantar palavras desconhecidas e dúvidas. Somente depois disso é que conversam no grupo tentando esclarecer o que não sabem, para que todos compreendam a tarefa. Eles devem esgotar as dúvidas uns com os outros no grupo. Depois, poderão solicitar sua ajuda.

Feito isso, os grupos iniciam a resolução da proposta. Durante a resolução, circule pela sala e assegure-se de que os estudantes sabem usar a régua para medir. Se não souberem, explique para que façam a medição correta.

Após realizarem todas as propostas, discuta coletivamente as descobertas e as conclusões dos grupos. Solicite que façam registros. Discuta com eles a escrita da condição de existência de um triângulo, você pode inclusive representar com a desigualdade triangular e utilizar esse nome com eles. Por ora basta que experimentem, investiguem e tirem conclusões, ações básicas do fazer matemático.

Para finalizar o momento, solicite que registrem em seu lapbook as aprendizagens sobre condição de existência de um triângulo.

PARTE 2 – VAMOS MEDIR ÂNGULOS?

Nesta etapa, o foco está nas ideias básicas de ângulos e a proposta é utilizar a aula invertida, metodologia que já foi utilizada anteriormente e que contribui para o desenvolvimento da autonomia e do protagonismo do estudante.

Disponibilize, com antecedência, o endereço dos seguintes vídeos:

- "Como usar o transferidor parte 1", disponível em: bityli.com/yt-transferidor (acesso em: 13 ago. 2022).

- "Como usar o transferidor parte 2", disponível em: bityli.com/yt-transferidor2 (acesso em: 13 ago. 2022).

Caso os estudantes não tenham acesso aos vídeos, eles podem combinar de assisti-los na casa de algum colega ou então você pode providenciar livros didáticos que abordem esse tema e disponibilizar para pesquisa.

Peça que assistam aos dois vídeos anotando informações importantes, termos novos e seu significado e, principalmente, observando como usar o transferidor para fazer medição de ângulos. Peça que tragam esses registros na próxima aula. Retome com eles a importância da autogestão desse momento individual de estudos e a relevância de realizar a atividade proposta, apresentar suas descobertas e suas dúvidas no momento coletivo que ocorrerá no início da próxima aula.

Inicie a aula seguinte com uma conversa sobre os vídeos, peça que socializem suas anotações, o que já sabiam e as dúvidas que ainda têm. Valorize quem realizou a tarefa solicitada. Faça uma breve exposição sobre a presença de ângulos em objetos e espaços que se encontram ao redor dos estudantes, apresente de modo organizado a nomenclatura relativa a ângulos e peça que anotem em seu lapbook esse resumo para futuras consultas.

Em seguida, convide-os a realizar a atividade disponível na 2ª etapa do **Anexo 9**.

Acompanhe a produção dos estudantes e registre como resolvem os problemas, essa é uma oportunidade para avaliá-los individualmente em relação ao conhecimento que já possuem sobre ângulos e à sua capacidade de leitura de textos matemáticos simples. Esses registros poderão dar pistas para você replanejar suas aulas ou mesmo a organização dos estudantes nas próximas atividades em grupos, por exemplo, formar duplas produtivas: um estudante que já avançou com aquele que ainda precisa avançar. Nesta hora, um aprende com o outro.

Finalize a proposta convidando os estudantes a anotar individualmente em seu lapbook tudo o que aprenderam sobre ângulos até aqui. Incentive-os a fazer desenhos para ilustrar suas anotações.

PARTE 3 – A SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DO TRIÂNGULO

Para concluir essa retomada das propriedades básicas de triângulos, a proposta é uma dobradura simples que permite inferir que a soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180o. Para isso, com os alunos organizados em pequenos grupos, proponha que realizem a 3ª etapa do **Anexo 9**.

Acompanhe o trabalho dos grupos e a realização da dobradura inicial, incentive-os a produzir triângulos bem diferentes uns dos outros para que possam perceber a propriedade independente do tipo e tamanho do triângulo.

No final, ao socializar as respostas dos grupos, solicite que anotem coletivamente no lapbook tudo que aprenderam sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo. Aproveite o momento para avaliar se é necessário propor outros problemas para os estudantes. Você pode selecionar algumas propostas de materiais didáticos do Ensino Fundamental.

É importante avaliar as aprendizagens dos estudantes neste momento e a autoavaliação pode trazer pistas para o planejamento das próximas aulas. Verifique se os estudantes percebem se avançaram. Em caso de dúvidas pontuais, você pode propor atividades diferenciadas organizando os grupos de acordo com as habilidades ainda não consolidadas e, caso perceba alguma dúvida comum à maioria dos estudantes, planeje retomar o assunto, mas utilizando uma nova estratégia de ensino. Disponibilize o roteiro de autoavaliação a seguir para os estudantes. Pode ser na versão impressa ou no quadro ou, então, projete e peça que copiem em uma folha.

Atenção para a avaliação!

Estudante, na realização das propostas apresentadas no “Momento 1: Revendo ângulos e triângulos”, você foi desafiado a realizar muitas atividades que envolviam importantes temas de Geometria e Medidas. Agora chegou o momento de você avaliar como foi esse percurso, para isso, você vai precisar retomar todas as anotações que fez em seu caderno e em seu lapbook durante esse estudo e de atenção porque essa proposta pode auxiliar você a organizar suas aprendizagens e dúvidas e seu/sua professor/a a pensar melhor em como auxiliar cada uma de vocês a aprender mais.

A seguir, mostramos o roteiro que você usará para se autoavaliar. Seu/sua professor/a explicará melhor a todos como ele deve ser preenchido, qual o prazo para você entregá-lo e como será usado para o/a professor/a auxiliar a todos a aprender mais.

Autoavaliação

Data: _____ Nome: _____ Turma: _____

Retome suas anotações de todas as atividades “Momento 1: Revendo ângulos e triângulos”. Escreva na primeira coluna da tabela os conteúdos e conceitos que você estudou até agora nas aulas e complete a segunda coluna com:

Aprendi – Se você tem certeza de que sabe esses conceitos e consegue responder questões relacionadas ao tema.

Preciso estudar mais – Se você sabe os conceitos, mas não está seguro para resolver novos exercícios ou responder questões relacionadas a ele.

Não aprendi – Se você não entendeu as ideias. Nesse caso, escreva nas linhas finais exatamente o que você não entendeu, como seu/sua professor/a pode ajudá-lo e o que você deve fazer para conquistar o que faltou.

TEMAS E CONCEITOS ESTUDADOS	MINHA APRENDIZAGEM

Não entendi: _____

O professor pode me ajudar: _____

Eu preciso fazer: _____

Percebeu o quanto você avançou? Quantas aprendizagens foram realizadas?

ATIVIDADE 4 ▶ MOMENTO 2

2 aulas:

Explorando o Teorema de Pitágoras

Para iniciar essa etapa, organize os estudantes em duplas e peça para que escrevam tudo o que sabem sobre um triângulo retângulo. Em seguida, convide dois ou três estudantes para socializar seus registros e peça que todos anotem as informações que ainda não estão registradas.

Peça que desenhem um triângulo retângulo no caderno e marquem um de seus ângulos agudos. Em seguida, apresente algumas orientações:

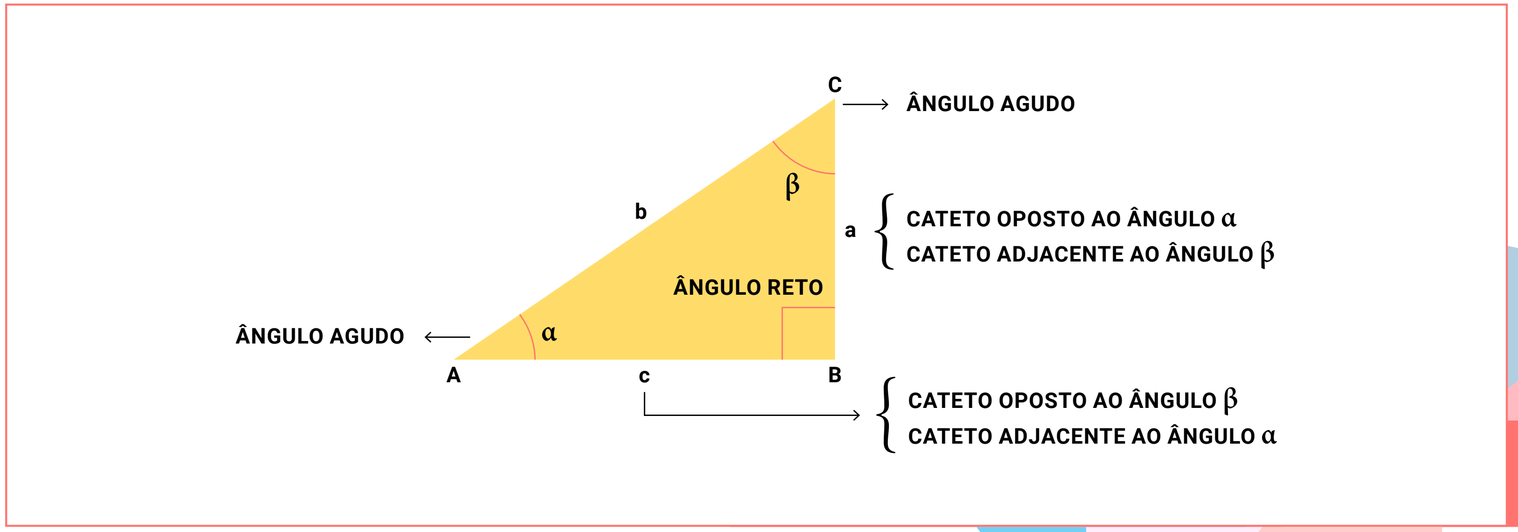
- Reforce com o lápis vermelho a hipotenusa do triângulo.
- Reforce com o lápis azul o cateto oposto ao ângulo pintado.
- Reforce com o lápis verde o cateto oposto ao ângulo pintado.

Aproveite o momento para explorar o vocabulário correto, converse sobre os nomes dos lados dos triângulos retângulos: catetos e hipotenusa, o significado das expressões cateto oposto e cateto adjacente a um determinado ângulo. Peça que localizem o outro ângulo agudo do triângulo desenhado e explore:

- Qual a cor do cateto oposto a esse ângulo agudo?
- Qual a cor do cateto adjacente a esse ângulo agudo?

Finalize o momento desenhando no quadro um triângulo retângulo e peça que os estudantes identifiquem os catetos opostos e adjacentes de cada ângulo. Registre as conclusões no seu desenho. Veja o exemplo ao lado.

Após essa exploração inicial, apresente para os estudantes o vídeo “A história da Matemática”, disponível em: bityli.com/yt-hist-mat (acesso em: 30 jun. 2022). Neste momento, apresente apenas um recorte desse vídeo - de 33min24s até 46min 40s -, mas disponibilize o endereço e convide-os para assistirem ao vídeo na íntegra em outro momento.



Para se aprofundar

Em outro momento, disponibilize também o texto “Pitágoras não criou o teorema de Pitágoras”, disponível em: bityli.com/teorema-de-pitagoras (acesso em: 13 ago. 2022) que também aborda um pouco da História da Matemática e as origens do Teorema de Pitágoras.

Após a exibição do trecho do vídeo, convide os estudantes a comentar o que mais gostaram, o que foi abordado e eles já sabiam e o que eles ainda não sabiam.

Pode ocorrer de algum dos estudantes comentar que já estudou o Teorema de Pitágoras ($hip^2 = cat^2 + cat^2$). Caso isso ocorra, peça que ele conte o que já sabe sobre este importante teorema da matemática. Apresente algumas perguntas norteadoras:

- Em que tipos de triângulos esse teorema pode ser utilizado?
- O que diz esse teorema?
- Com que objetivo você poderia utilizá-lo?

Anuncie então que os estudantes que já estudaram esse teorema terão a oportunidade de aprofundar seus estudos e quem ainda não estudou terá a oportunidade de fazê-lo agora.

Proponha a sequência de atividades disponível no **Anexo 3.** Os estudantes podem trabalhar em duplas. Oriente-os a fazer o registro das atividades no caderno.

Enquanto os estudantes realizam a proposta, circule pelas duplas registrando:

- Quem faz com facilidade (esses alunos podem ser monitores nas próximas atividades desta sequência didática).
- Quais são as principais dificuldades e dúvidas (esses registros ajudarão você a planejar os pontos que serão abordados no momento de conversa coletiva).
- Os erros que conseguir identificar (esses erros podem ser focos de atenção na discussão da atividade e também base para as planejas as próximas atividades).

Exemplo de exercícios para a 1ª etapa:

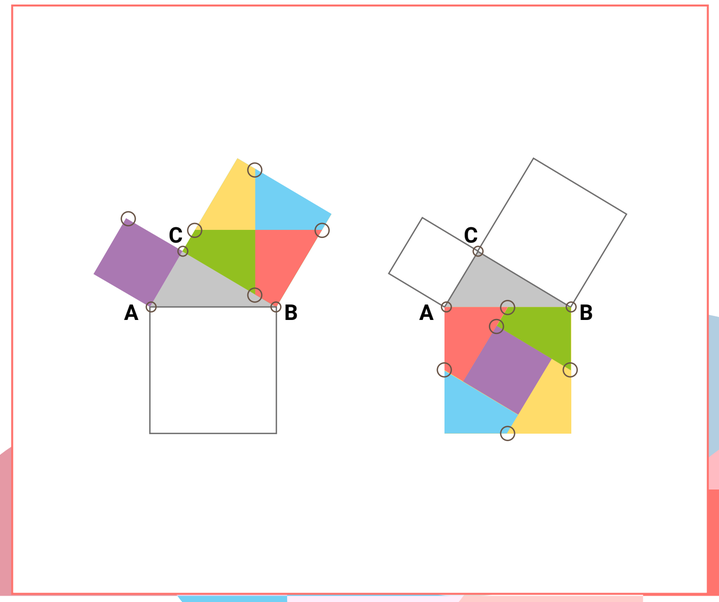
a) Qual(ais) a(s) cor(es) da(s) peça(s) utilizada(s) para cobrir o quadrado menor?

b) Qual(ais) a(s) cor(es) da(s) peça(s) utilizada(s) para cobrir o quadrado médio?

c) Qual(ais) a(s) cor(es) da(s) peça(s) utilizada(s) para cobrir o quadrado maior?

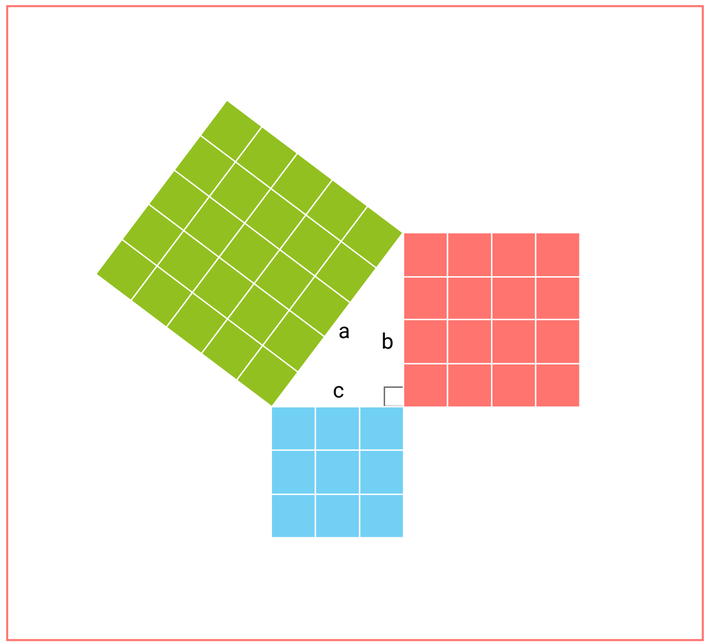
d) Qual a relação entre as áreas desses três quadrados? Explique sua resposta e escreva uma expressão matemática para representar essa situação. A soma das áreas dos dois quadrados menores é igual à área do quadrado maior, pois para cobrir o quadrado maior utilizei todas as peças que cobriram os dois quadrados menores. área do quadrado maior = área do quadrado menor + área do quadrado médio

e) Lembrando que a medida dos lados do triângulo retângulo é equivalente à medida dos lados de um dos quadrados, é possível reescrever a sentença anterior utilizando as palavras cateto e hipotenusa? $hip^2 = cat^2 + cat^2$



Exemplo de exercícios para a 2ª etapa:

Analise as seguintes situações:



a) Se cada quadradinho possui lado igual a 1 (uma) unidade, identifique a medida dos seguintes elementos:
- Hipotenusa a. Resposta: 5u
- Cateto b. Resposta: 4u
- Cateto c. Resposta: 3u

b) Se cada quadradinho possui lado igual a 2 (duas) unidades, identifique a medida dos seguintes elementos:
- Hipotenusa a. Resposta: 10u
- Cateto b. Resposta: 8u
- Cateto c. Resposta: 6u

c) Se cada quadradinho possui lado igual a 3 (três) unidades, identifique a medida dos seguintes elementos:
- Hipotenusa a. Resposta: 15 u
- Cateto b. Resposta: 12 u
- Cateto c. Resposta: 9 u

d) Qual a regularidade que você observa entre as medidas dos lados desses triângulos?
Resposta esperada: Os lados desses triângulos são proporcionais: (3, 4, 5), (6, 8, 10), (9, 12, 15).

e) O Teorema de Pitágoras é válido em todas as situações apresentadas? Efetue os cálculos e verifique se sua hipótese estava correta.
Resposta esperada: Sim, o teorema de Pitágoras é válido para todos os triângulos, pois:

$5^2 = 3^2 + 4^2$	$10^2 = 6^2 + 8^2$	$15^2 = 9^2 + 12^2$
25 = 9 + 16	100 = 36 + 64	225 = 81 + 144

Para encontrar mais ternas pitagóricas, basta partir do triângulo cujos lados medem 3, 4, 5 e encontrar novos triângulos com lados proporcionais, por exemplo: (12, 16, 20), (15, 20, 25). Porém existem outros exemplos: (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (12, 35, 37), (13, 84, 85), (16, 63, 65), (20, 21, 29)...

Após a realização da proposta, proponha um momento de discussão coletiva. Convide alguns estudantes para socializar suas estratégias. Professor/a, lembre-se que o foco aqui não é apenas uma exposição dos registros, mas sim, um momento de muita troca, onde um estudante aprende com o outro. Aquele que está explicando como pensou, apreende mais sobre o tema, pois organiza suas ideias e desenvolve a argumentação e a oralidade.

Por outro lado, aquele que está escutando, está cognitivamente ativo, tentando entender como seu colega pensou, validando ou questionando a resolução, isto é, está ampliando seu repertório de estratégias, desta forma, estará mais preparado para enfrentar uma próxima situação que envolve resolução de problemas. Vale ressaltar que mesmo que a estratégia não esteja totalmente correta ou que esteja incompleta, ela pode ser apresentada para o grupo no momento de discussão coletiva, pois os próprios colegas podem apresentar "pistas" para que essa estratégia seja revisitada e ajustada/corrigida.

Aproveite o momento de conversa coletiva para retomar a semelhança de triângulos e garantir que todos tenham compreendido o Teorema de Pitágoras e as ternas pitagóricas.

Finalize a etapa, convidando o estudante a registrar em seu lapbook as descobertas/ aprendizagens realizadas. Incentive-o a fazer desenhos, esquemas, breves descrições e/ou lembretes relacionados ao tema estudado.

Para aprofundar as aprendizagens, é muito importante apresentar situações que envolvam a aplicação do Teorema de Pitágoras. Proponha que os estudantes resolvam problemas que possam ser modelados pelo teorema estudado. Você pode selecionar essas atividades do material didático. Oriente-os a pesquisar os registros do lapbook sempre que necessário.

Para se aprofundar

Se necessário, para ampliar o estudo do Teorema de Pitágoras e das ternas Pitagóricas, proponha os exercícios disponibilizados pela plataforma do Khan Academy, disponíveis em: bityli.com/use-o-teorema e bityli.com/medidas-triângulos-retângulos (acessos em: 23 maio 2022).

Conectando sequências

Conexões com o Material do Volume I e outras explorações

Nesta SD. exploramos a representação geométrica do Teorema de Pitágoras, contemplando parcialmente a habilidade EM13MAT308 - Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. Para aprofundar as aprendizagens dos estudantes, é essencial que o/a professora também explore a SD 3 do Material do Volume I, em que são contempladas todas as relações métricas do triângulo retângulo, com base na semelhança de triângulos, incluindo a demonstração algébrica do Teorema de Pitágoras.

2 aulas:

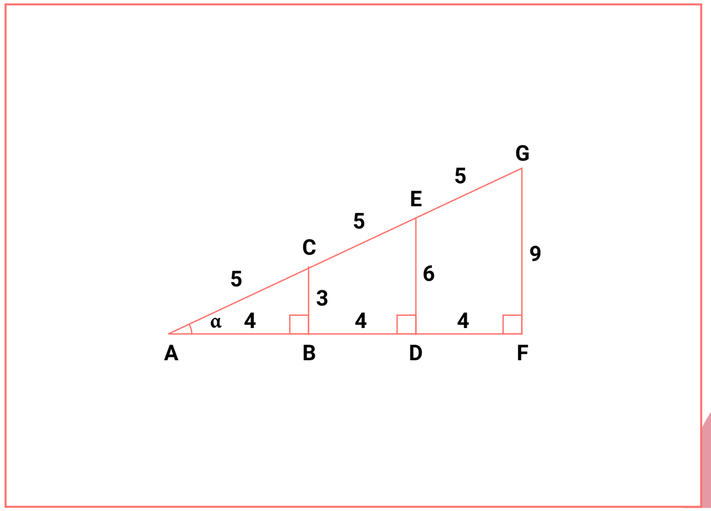
As relações trigonométricas no triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente

Inicie o diálogo retomando um pouco da história da Matemática. Conte que a Matemática nasceu e se desenvolveu a partir das necessidades que a humanidade encontrava para entender o mundo ao seu redor.

Anuncie que, nesta etapa da terceira SD, o foco é explorar algumas relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de triângulos retângulos e que as atividades vão envolver muita investigação, formulação de hipóteses e muita troca e cooperação entre os estudantes. Desta forma, é muito importante que todos se engajem, realizem as propostas apresentadas, colaborando assim para que o grupo atinja as expectativas de aprendizagem. Lembre-os de que é importante não deixar ninguém para trás.

Para realizar essa proposta, organize os estudantes em pequenos grupos. Explique que se desejarem, poderão utilizar a calculadora, pois ela será uma grande aliada para agilizar os cálculos envolvidos e contribuir com a identificação de regularidades. As orientações para a atividade podem ser disponibilizadas no quadro da sala ou ser projetada para os estudantes.

A professora de Paulo solicitou que ele desenhasse 3 triângulos retângulos, semelhantes entre si. Veja a figura construída pelo estudante:



Converse com seus colegas e procure explicar:

- Quais são os triângulos retângulos construídos pelo estudante?
- Como é possível verificar se eles são realmente semelhantes? Explique.
- Determine a medida dos lados desses triângulos. Lembre-se de que você pode obter esses valores apenas analisando as informações contidas na figura. Construa em seu caderno a tabela apresentada a seguir e registre as informações obtidas.

Nome do triângulo	Medida do cateto oposto ao ângulo α	Medida do cateto adjacente ao ângulo α	Medida da hipotenusa
Triângulo 1	3	4	5
Triângulo 2	6	8	10
Triângulo 3	9	12	15

Obtenha, em cada triângulo, a razão (divisão) entre as medidas do cateto oposto ao ângulo alfa e da hipotenusa e registre suas conclusões:

Triângulo 1: $\frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = ____$

Triângulo 2: $\frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = ____$

Triângulo 3: $\frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = ____$

Você identifica alguma regularidade entre essas razões? Converse com seus colegas e registre suas conclusões.

Professor/a, se achar adequado, para ampliar as aprendizagens: solicite que, com o transferidor, os estudantes meçam o ângulo α e, com a régua e a malha quadriculada, construam um novo triângulo retângulo, semelhante aos demais triângulos. Caso seja possível, eles também podem construir a figura desejada utilizando um software de geometria dinâmica, como o Geogebra (disponível em: bityli.com/Geogebra.
Em seguida, peça aos grupos que troquem os triângulos construídos e repitam a mesma exploração com esse novo triângulo: medir os lados e encontrar o valor da razão.

Novo Triângulo: $\frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = ____$

Questione então: "A mesma regularidade foi observada?"

Enquanto os estudantes realizam a proposta, circule pelos grupos. Esse pode ser um momento de avaliar os estudantes para fazer ajustes de rotas, replanejar para contribuir com o avanço das aprendizagens. Prepare previamente algumas questões que poderão ser o foco da sua avaliação, por exemplo:

- Identificam os 3 triângulos construídos?
- Explicam usando argumentos corretos e convincentes porque é possível afirmar que eles são congruentes?
- Identificam, em todos os triângulos, a hipotenusa, os catetos opostos e adjacentes ao ângulo α?
- Reconhecem a regularidade, isso é, em todos os casos, o valor da razão é 3/5?

Registre as fragilidades e as dificuldades encontradas para retomá-los no momento de discussão coletiva.

Após a realização da atividade, convide os estudantes a socializar suas estratégias e suas conclusões. Incentive-os a explicar como pensaram, o que descobriram e em que pontos ainda ficaram com dúvidas. Conduza a discussão de modo que percebam que, em todos os casos, a razão entre a medida do cateto oposto a alfa e a hipotenusa é sempre α, inclusive quando cada grupo construiu o seu triângulo. É importante que percebam que esses triângulos construídos pelos grupos podem ter sido diferentes, mas a razão obtida é a mesma.

Formalize então que, em um triângulo retângulo, a razão

$$\frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

é constante e recebe o nome de seno de α, então

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

No caso dos triângulos envolvidos nesta proposta,

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{3}{5}$$

Em outro momento, proponha que os estudantes realizem uma nova exploração, contemplando agora as outras duas razões trigonométricas: cosseno e tangente. Você pode repetir a mesma estratégia. Enquanto circula pela sala no momento que os estudantes estão realizando a proposta, você pode coletar evidências e quais as dúvidas que existiam na exploração do seno que já foram sanadas e quais ainda se configuram como ponto de atenção.

No momento de discussão coletiva, garanta que os estudantes concluam que:

$$\cos\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

No caso dos triângulos envolvidos nesta proposta,

$$\cos\alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}$$

No caso dos triângulos envolvidos nesta proposta,

$$tg\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha} = \frac{3}{4}$$

Após todas as discussões, você pode rever os seus registros e analisar se as habilidades que se configuraram como fragilidades foram consolidadas, se as dúvidas dos estudantes foram resolvidas. E, caso necessário, retome os pontos importantes das explorações realizadas nesta SD. Antes de avançar com o estudo do tema, proponha um momento de sistematização das aprendizagens. Peça que, individualmente, construam um texto/resumo contendo tudo que aprenderam sobre as relações trigonométricas no triângulo retângulo. Esses registros poderão ser realizados no lapbook. Em seguida, convide alguns estudantes para socializar seus registros e todos podem complementar seus registros a partir da socialização dos colegas.

Nesse momento, é muito importante apresentar alguns exercícios ou resolução de problemas envolvendo as relações trigonométricas. Você pode selecionar algumas propostas interessantes do material didático. Solicite que trabalhem sozinhos, resolvendo aquilo que já sabem e anotando suas dúvidas para que vocês conversem a respeito delas após um tempo combinado.

Depois disso, os estudantes devem trocar suas respostas com as de um colega e um corrigir as respostas do outro para depois conversarem sobre as observações que um fez às respostas do outro. Em seguida, se considerar necessário, solicite a alguns estudantes que coloquem no quadro suas respostas e, caso haja divergências entre elas, evite dizer se está certo ou não, incentive a discussão porque, nesse momento, os estudantes desenvolvem a linguagem matemática e as habilidades de argumentação.

Para se aprofundar

Professor/a, caso você perceba que os estudantes ainda apresentam fragilidades com a aplicação dos temas estudados, você pode disponibilizar vídeos, textos e exercícios extras, como os disponíveis na plataforma do Khan Academy: bityli.com/razoes-trigo (acesso em: 23 maio 2022).

Você pode selecionar atividades diferentes para grupos de estudantes com diferentes dificuldades. Por exemplo, para aqueles que ainda não construíram os conceitos, solicite que assistam ao vídeo e façam um texto explicando as suas aprendizagens. Aqueles que apresentam dificuldades com as operações, solicite que resolvam os exercícios etc.

ATIVIDADE 4 ▶ MOMENTO 4

2 aulas:

Construindo um teodolito para medir altura

As primeiras noções de Trigonometria estão ligadas às relações existentes entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo. Essas relações possibilitam o cálculo de valores desconhecidos (lados e ângulos) do triângulo e, com base nelas, é possível calcular alturas e distâncias inacessíveis.

Nesta proposta, os estudantes vivenciarão, na prática, como isso acontece, ou seja, mobilizarão as aprendizagens sobre as relações trigonométricas do triângulo para calcular uma altura inacessível (prédio da escola, ou uma árvore, ou um prédio vizinho, entre outros).

Desta forma, a proposta visa consolidar o desenvolvimento da Competência geral 2 prevista pela BNCC: Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

Inicie a proposta convidando os estudantes a estimar alguma medida inacessível: pode ser a altura de árvore localizada no pátio da escola ou a altura do prédio da escola ou de algum prédio vizinho. Vamos tomar como exemplo a medida da altura de uma árvore. Proponha algumas questões iniciais:

- Quanto você acha que mede a árvore do pátio da escola? Faça uma estimativa dessa altura e anote esse valor.
- O que você poderia fazer para ter certeza se sua estimativa foi adequada, ou seja, estava próxima da altura real da árvore?
- Você conhece algum instrumento que possibilite medir essa altura?

Pergunte também se eles já ouviram falar no teodolito e, caso ninguém conheça esse instrumento, convide-os a fazer uma rápida pesquisa na internet para saber mais sobre esse tema: o que é, para que serve e quais os profissionais que utilizam esse instrumento.

Anuncie então que farão a construção de um teodolito caseiro para medir a altura da árvore. Organize os estudantes em grupos e disponibilize para uma cópia do Anexo 10 e os materiais solicitados e peça que realizem as atividades I, II e III. Circule pelos grupos durante a realização desta etapa da proposta para ajudá-los com a construção do instrumento e a medição do ângulo e da distância entre a árvore e o teodolito. Quando todos terminarem esta etapa, peça que se sentem formando uma roda para facilitar a comunicação e convide os grupos para socializarem seus desenhos, as medidas obtidas.

Exemplo de registro:

É importante que observem que não existe uma única resposta correta. Dependendo da posição da pessoa que está com o teodolito o valor do ângulo e da distância serão diferentes. Verifique se todos identificaram que existe um triângulo retângulo cujos vértices são as extremidades da árvore e o centro do teodolito. Questione também quais as medidas conhecidas e quais as desconhecidas desse triângulo. Pergunte se a altura da pessoa que está segurando o teodolito deve ser considerada para calcular a altura da árvore. Espera-se que identifiquem que conhecem o ângulo, o cateto adjacente a ele e que a altura da árvore é a medida do cateto oposto mais a altura da pessoa.

Após essas explorações coletivas, peça que retomem os grupos e conversem sobre quais estratégias poderiam utilizar para obter a medida da árvore. Realizem a atividade IV do Anexo 10. Enquanto realizam as discussões, circule pelos grupos. Se necessário, peça que consultem o lapbook para relembrar as relações trigonométricas do triângulo retângulo. Certifique-se que todos identificaram que a relação trigonométrica a ser utilizada é a tangente e peça que expliquem porque não escolheram o seno ou o cosseno. Oriente-os também a buscar a tangente do ângulo em uma tabela trigonométrica do livro didático ou da internet, ou até mesmo em calculadoras científicas, se for possível.

Finalize a proposta convidando os grupos para uma roda de conversa. Peça que expliquem qual a estratégia utilizada e justifiquem o porquê da escolha. Amplie as discussões com algumas perguntas norteadoras:

- A estimativa realizada estava próxima da medida obtida com os cálculos?
- A medida obtida com os cálculos é a medida exata da altura da árvore? Explique!

Peça também que realizem uma autoavaliação individual com base nos seguintes pontos:

- Como foi participar da atividade?
- Você participou ativamente da proposta, apresentando sua opinião e dando sugestões?
- Respeitou a opinião e o tempo dos colegas?
- Colaborou para que o grupo chegasse à resolução do problema?
- Existem alguns aspectos que você pode melhorar na próxima atividade para efetivar a sua colaboração com o grupo? Quais?

Peça que registrem suas respostas e guarde para que sejam consultadas de tempos em tempos para analisarem em que pontos já avançaram e em quais ainda precisam avançar.

ATIVIDADE 4 ▶ MOMENTO 5

3 aulas:

As relações trigonométricas dos ângulos notáveis: 30°, 45° e 60°

O foco desta atividade é ampliar o estudo das relações trigonométricas no triângulo retângulo abordado no momento anterior. A ideia agora é construir o conceito de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis (30°, 45° e 60°) visto que esse é um conhecimento prévio necessário para o desenvolvimento das habilidades EM13MAT306 - Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria; e EM13MAT308 - Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos, esse última explorada no volume 1 desse material.

A proposta contribui com o desenvolvimento da Competência Específica 3 de Matemática para o Ensino Médio: Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

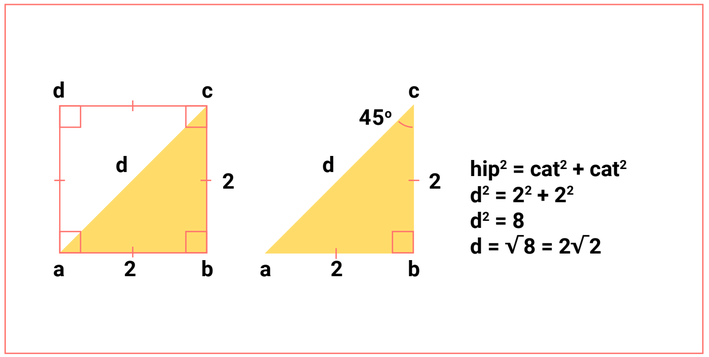
Após prender o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos notáveis, de forma significativa, os estudantes poderão utilizar essas informações sempre que desejarem e elas podem contribuir com a agilidade no cálculo de distâncias inacessíveis.

Converse um pouquinho sobre a dinâmica da aula: serão alternados momentos de investigação coletivas e momentos expositivos dialogados. Ressalte a importância de todos participarem da aula expositiva, apresentando suas dúvidas, suas descobertas e suas aprendizagens. Lembre-os de que fazer os registros em uma aula expositiva é essencial, pois eles podem ser utilizados em outros momentos da aprendizagem. Para isso, faça algumas paradas ao longo da aula e solicite que anotem isso ou aquilo conforme sua orientação. Ao final, organize uma pequena síntese da aula com toda a turma e peça que registrem em seus cadernos. Isso mostra o sentido e a lógica do percurso de estudo que foi realizado.

1 ª ETAPA:

Inicialmente, o objetivo é explorar as relações trigonométricas do ângulo de 45º. Peça que, em duplas, construam um quadrado com qualquer medida de lado. Diga que o objetivo é explorar um ângulo de 45o e questione se o quadrado seria uma figura adequada para essa exploração, se é possível obter um ângulo com a medida procurada. Peça que expliquem.

Espera-se que os estudantes percebam que, ao traçar a diagonal do quadrado, eles obtêm um triângulo retângulo cujos ângulos agudos medem 45º. Explore também, oralmente, quais são as medidas conhecidas desse triângulo e garanta que percebam que, apesar da medida dos lados dos quadrados construídos serem diferentes, todos conseguem obter os triângulos retângulos com ângulos agudos de 45º. Pergunte quais as medidas necessárias para determinar o seno desse ângulo. Espera-se que percebam que precisam do valor da hipotenusa. Questione qual estratégia seria adequada para encontrar esse valor. Escolha um dos quadrados construídos na sala e resolva no quadro, em um momento expositivo dialogado, o passo a passo para se obter essa medida. Por exemplo:



Em seguida, convide as duplas a determinar o valor da medida da hipotenusa do triângulo construído e peça que socializem a medida do lado do quadrado e a medida da diagonal. Pergunte se eles identificam alguma regularidade e conclua pedindo para escrever uma sentença matemática que forneça a regularidade encontrada. Espera-se que concluam que:

- lado do quadrado é 2 » diagonal $2\sqrt{2}$
- lado do quadrado é 5 » diagonal $5\sqrt{2}$
- lado do quadrado é 3 » diagonal $3\sqrt{2}$
- lado do quadrado é 1 » diagonal $1\sqrt{2}$

Retome porque encontraram o valor da medida da diagonal e peça para 4 ou 5 duplas determinar o sen 45º, outras 4 ou 5 duplas determinam o cos 45º, e outras, a tg 45º.

Nesta etapa, é muito importante você circular pelos grupos, pois talvez alguns estudantes apresentem dificuldades em trabalhar com os números irracionais. Anote as dificuldades de cada estudante e, antes de iniciar a 2ª etapa da atividade, agrupe os estudantes por necessidades de aprendizagem, apresentando diferentes atividades, conforme sugerido no quadro “Aprofundando a aprendizagem” a seguir.

No final da proposta, peça que comparem os resultados obtidos e questione os valores encontrados. Mais uma vez, enfatize que, apesar dos quadrados construídos terem medidas diferentes, todos encontraram os mesmos valores para sen, cos e tg de 45º. Esse fato pode embasar as conclusões dos estudantes e contribuir que percebam que sen 45º é igual a $\sqrt{2}/2$ em qualquer situação. Oriente-os a registrar as informações obtidas em uma tabela que poderá ser consultada em outros momentos da aula.

Resposta:

	30º	45º	60º
sen		$\sqrt{2}/2$	
cos		$\sqrt{2}/2$	
tag		1	

Para se aprofundar

Professor/a, caso tenha identificado que alguns estudantes apresentaram dificuldades durante a realização da proposta, esse é o momento de retomar suas anotações, agrupar os estudantes de acordo com as dificuldades encontradas e apresentar diferentes propostas para a mesma turma:

- Para aqueles que estão com dúvidas em simplificar, somar e subtrair números irracionais, proponha que realizem as atividades propostas no plano de aula da Nova Escola, "Revendo o conceito de soma e subtração", disponível em: bityli.com/revendo-conceito (acesso em: 25 maio 2022).

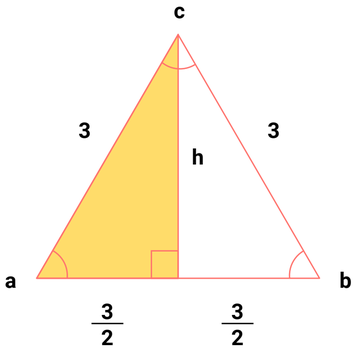
- Para aqueles que estão com dificuldades em modelar uma situação que possa ser modelada pelo Teorema de Pitágoras, apresente as atividades do plano de aula da Nova Escola "Calculando perímetro de triângulo e quadrilátero no Geoplano com o auxílio do Teorema de Pitágoras", disponível em: bityli.com/calculando-perimetro (acesso em: 25 maio 2022).

Os estudantes que não apresentaram dificuldades durante a realização das propostas poderão ser os tutores e contribuir com aqueles que ainda precisam avançar em suas aprendizagens.

2 ª ETAPA:

O objetivo é explorar as relações trigonométricas do ângulo de 60o. Questione se o quadrado seria uma figura adequada para essa exploração. Espera-se que concluam que não é muito tranquilo obter um ângulo com essa medida no quadrado. Pergunte então se eles têm alguma sugestão sobre qual figura utilizar nesse momento. Espera-se que tragam como resposta o triângulo equilátero. Caso eles não apresentem essa resposta, você pode apresentar alguns polígonos regulares, como o triângulo, o hexágono e o octógono, e pedir a eles que descubram a medida dos ângulos de cada um deles justificando a sua resposta.

Peça então que desenhem um triângulo equilátero (pode ser apenas um esboço). Questione quais as medidas necessárias para determinar o seno 60o, quais delas eles já sabem e quais eles precisam determinar. Espera-se que percebam que precisam obter inicialmente um triângulo retângulo, pois as relações estudadas nesta etapa de sequência só são válidas para esse tipo de triângulo. Questione como obter um triângulo retângulo a partir do triângulo equilátero. Em seguida, após realizar a divisão, questione quais as medidas do triângulo obtido. Dê um tempo adequado para que cada dupla calcule a medida dessa altura. Em seguida, peça para socializar os resultados e questione qual estratégia seria adequada para encontrar esse valor. Escolha um dos triângulos construídos na sala e resolva, no quadro, em um momento expositivo dialogado, o passo a passo para se obter essa medida. Por exemplo:



$$3^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + h^2$$

$$9 = \frac{9}{4} + h^2$$

$$9 - \frac{9}{4} = h^2$$

$$\frac{27}{4} = h^2$$

$$\frac{\sqrt{27}}{4} = h$$

Em seguida, convide as duplas a determinar o valor da medida da hipotenusa do triângulo construído e peça que socializem a medida do lado do quadrado e a medida da diagonal. Pergunte se eles identificam alguma regularidade e conclua pedindo para escrever uma sentença matemática que forneça a regularidade encontrada. Espera-se que concluam que:

lado do triângulo é 2 » altura $\frac{2\sqrt{3}}{2}$

lado do triângulo é 5 » altura $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

lado do triângulo é 3 » altura $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

lado do triângulo é 1 » altura $\frac{1\sqrt{3}}{2}$

Retome o porquê de encontrar o valor da medida da altura desse triângulo equilátero e novamente peça para 4 ou 5 duplas determinarem o sen 60°, outras 4 ou 5 duplas determinam o cos 60°, e outras a. tg 60°.

No final da proposta, peça que comparem os resultados obtidos e questione os valores encontrados. É muito importante que percebam que, apesar dos triângulos equiláteros construídos serem diferentes, todos encontraram o mesmo valor para sen 60°, cos 60° e tg 60°. Oriente-os a registrar essas informações em uma tabela que poderá ser consultada em outros momentos.

Resposta:

	30°	45°	60°
sen		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tag		1	$\sqrt{3}$

Professor/a, não se esqueça de observar os estudantes durante a realização da proposta e dar retorno para a classe a respeito do que estão fazendo bem, no que já melhoraram, e quais metas ainda precisam ser vencidas.

Pergunte também a opinião deles: O que acham que já fazem? Em que é preciso aperfeiçoar?

3 ª ETAPA:

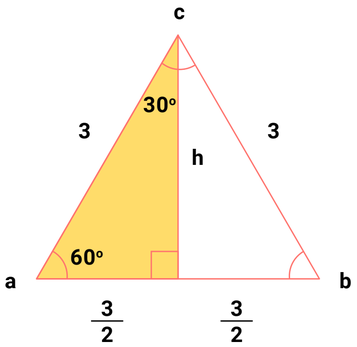
O objetivo agora é explorar as relações trigonométricas do ângulo de 30º. Questione se em alguma das figuras utilizadas nas etapas anteriores existe algum ângulo de 30º. Se necessário, em um momento expositivo dialogado, retome o conceito de simetria e deixe que percebam que a altura do triângulo equilátero é o eixo de simetria, portanto divide o ângulo de 60º em duas partes congruentes, ou seja, 30º.

Proponha então que os estudantes, organizados em duplas, repitam a exploração, no mesmo triângulo equilátero, porém com um olhar para o ângulo de 30º.

Assim, percebem se sua forma de pensar e de aprender a matemática está correta ou equivocada, tomam consciência do que sabem e do que falta saber, conhecem a si mesmos, conhecem o outro, percebem como cada um avança, retrocede, aprende. Isso gera autonomia e os tornam protagonistas de suas escolhas, de seus projetos e de sua história de vida.

Após a realização da proposta, convide os estudantes a socializar os resultados. Caso haja alguma divergência, você pode solicitar que os estudantes realizem a proposta no quadro e abrir uma roda de conversa para todos discutirem e alinharem suas aprendizagens. No final, peça que completem a tabela com os resultados obtidos.

Para finalizar a etapa, oriente os estudantes a registrar suas aprendizagens no lapbook. Para ampliar as aprendizagens, proponha exercícios disponíveis no material didático.



Resposta:

	30º	45º	60º
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tag	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

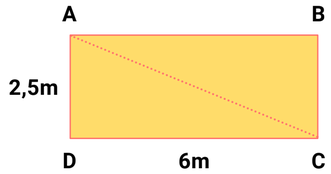
Bora se preparar?!

1 aula:

Professor/a, para ampliar as aprendizagens dos estudantes e permitir que pensem mais a respeito do Teorema de Pitágoras e das relações trigonométricas no triângulo retângulo, peça que resolvam as questões a seguir. Eles podem trabalhar individualmente e consultar os registros do lapbook. No final, peça que troquem suas resoluções e disponibilize um gabarito comentado para que um corrija a produção do outro. Caso necessário, resolva 1 ou 2 exercícios no quadro. Para agilizar os cálculos, permita que os estudantes trabalhem com a calculadora.

EXERCÍCIO 1

Questão: 2346. Descritor: M600. MT – fase 1
Uma formiga está sobre um tampo de uma mesa, representado pelo quadrilátero ABCD, e se desloca sobre a diagonal AC. Quanto essa formiga irá percorrer em metros?

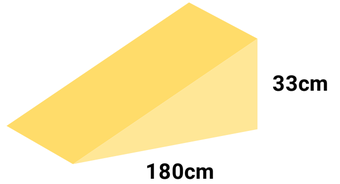


a) 2,5 m
b) 3,5 m
c) 5,0 m
d) 6,0 m
e) 6,5 m

Gabarito: E

EXERCÍCIO 2

Questão: 165. Descritor: M157. MT – fase 1
A figura abaixo mostra uma rampa de acesso a uma plataforma. De acordo com as medidas indicadas na figura, determine o comprimento dessa rampa.

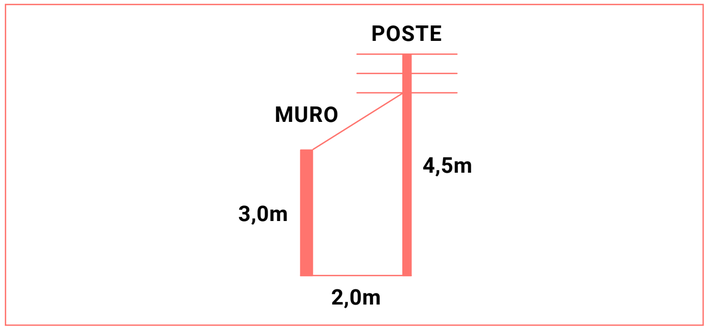


a) 216 cm
b) 180 cm
c) 213 cm
d) 183 cm
e) 33 cm

Gabarito: D

EXERCÍCIO 3

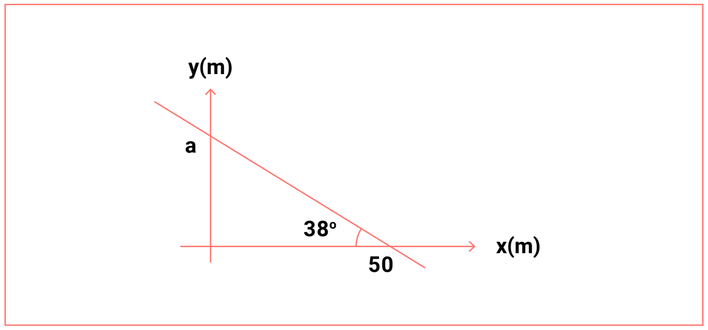
Questão: 1657. Descritor: M156. MT – fase 1
Uma das extremidades de um fio elétrico está presa a um poste a 4,5 m de altura e a outra extremidade está presa a um muro a 3 m de altura. Se o poste está a 2 m do muro, qual o comprimento do fio?



a) 4,5 m
b) 2,5 m
c) 3,0 m
d) 2,0 m
e) 1,5 m
Gabarito: B

EXERCÍCIO 4

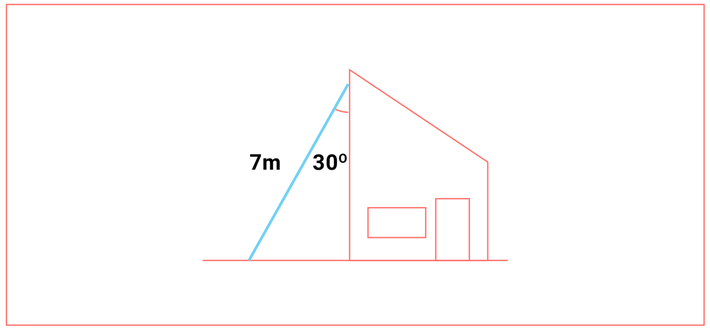
Questão: 1863. Descritor: M082. MT – fase 1
Considere o gráfico abaixo. Determine o valor aproximado de a, em metros, que corresponde ao valor em que o gráfico cruza o eixo da ordenada. Considere: sen 38° = 0,615; cos 38° = 0,788; tg 38° = 0,781.



a) 39,05 m
b) 63,45 m
c) 39,4 m
d) 30,75 m
e) 81,3 m
Gabarito: A

EXERCÍCIO 5

Questão: 2285. Descritor: M742. MT – fase 1.
Para consertar um telhado, um pedreiro colocou uma escada de 7 metros de comprimento encostada a uma parede, formando com ela um ângulo de 30°, como mostra a figura abaixo. A que distância do chão, em metros, o topo da escada está apoiado na parede?



a) $\sqrt{3}/2$ m
a) $\sqrt{3}$ m
a) 7 m
a) $7\sqrt{3}$ m
a) $7\sqrt{3}$ m
Gabarito: E

Atividade 5

ATIVIDADE 5

RESOLVENDO UM PROBLEMA NÃO CONVENCIONAL

Foco: resolução de um problema não convencional.

Tempo sugerido: 1 hora/aula

Possíveis materiais: 1 cópia do problema para cada grupo ou a sua versão digital para ser projetada para os estudantes.

Professor/a, organize os estudantes em grupo e apresente a situação a seguir. Dê um tempo adequado para a elaboração de uma estratégia de resolução. No final da proposta, convide alguns estudantes a socializar suas estratégias. Esse é um momento muito importante para a aprendizagem em matemática.

Enquanto explica, o estudante organiza suas ideias, desenvolve a argumentação, a oralidade, e contribui para aumentar o repertório de resolução dos demais colegas. Nesse momento, um aprende com o outro e ficam mais fortalecidos para enfrentar as próximas situações problemas.

A intenção é que os estudantes desenvolvam estratégias de solução e diferentes modos de pensar, estimulando o raciocínio divergente, indutivo e lógico dedutivo nas aulas de matemática. A resolução desses problemas exige muita reflexão e, muitas vezes, uma estratégia não usual, que pode ser por meio de desenho, tabela, esquema, tentativa e erro etc.

Chegou a hora de resolver um problema desafiador. Não tenha medo de errar nem desista se a primeira tentativa falhar. Você sabia que as tentativas fazem seu raciocínio matemático se desenvolver mais do que se você acertar rapidamente. Resolver problemas exige esforço, mas você chega lá se não desistir.

Lembre-se de:

- Ler todo o texto com calma.
- Grifar os dados fornecidos e que serão importantes para ajudar você a encontrar a solução.
- Resolver o problema como quiser: fazendo um desenho, um esquema, uma tabela. O importante é sempre registrar no papel a forma como resolveu, tomar nota da sua estratégia.
- Após resolver, releia o problema e valide a resposta.

(OBMEP) Em uma brincadeira, a mãe de João e Maria combinou que cada um deles daria uma única resposta correta a três perguntas que ela faria.

Ela perguntou:
Que dia da semana é hoje?
Hoje é quinta, disse João.
É sexta, respondeu Maria.

Depois perguntou:
Que dia da semana será amanhã?
Segunda, falou João.
Amanhã será domingo, disse Maria.

Finalmente ela perguntou:
Que dia da semana foi ontem?
Terça, respondeu João.
Quarta, disse Maria.

Em que dia da semana a brincadeira aconteceu?

EXEMPLO DE RESPOSTA ESPERADA:

Inicialmente vamos organizar, em uma tabela, as respostas de João e de Maria. É importante lembrar que somente uma resposta de cada criança está correta, ou seja, duas respostas de cada criança estão incorretas.

	João	Maria
Ontem	Terça-feira	Quarta-feira
Hoje	Quinta-feira	Sexta-feira
Amanhã	Segunda-feira	Domingo

Agora, uma das estratégias que podemos utilizar é considerar uma das respostas verdadeiras (formular uma hipótese) e analisar se as outras são verdadeiras ou falsas. Veja:

1ª hipótese:

Considere que a primeira afirmação de João (da tabela) é a correta, isto é, vamos considerar que ontem foi terça-feira. Logo, hoje é quarta e amanhã, quinta-feira. Vamos colocar essas informações na tabela na cor azul.

	João	Maria
Ontem	Terça-feira	Quarta-feira
Hoje	Quinta-feira	Sexta-feira
Amanhã	Segunda-feira	Domingo

Comparando cada informação já existente na tabela, com as informações escritas em azul, podemos classificá-las em verdadeiras ou falsas.

	João	Maria
Ontem	Terça-feira V	Quarta-feira F
Hoje	Quinta-feira F	Sexta-feira F
Amanhã	Segunda-feira F	Domingo F

Observe que, se ontem era terça-feira, então nenhuma afirmação de Maria está correta, e, pelo problema apresentado, uma de suas afirmações é verdadeira.
Conclusão: ontem não era terça-feira.

2ª hipótese:

Considere que a primeira afirmação de Maria (da tabela) é a correta, isto é, vamos considerar que ontem foi quarta-feira. Logo, hoje é quinta e amanhã, sexta-feira. Vamos colocar essas informações na tabela (cor azul) e classificar as informações já existentes na tabela.

	João	Maria
Ontem	Terça-feira F	Quarta-feira V
Hoje	Quinta-feira V	Sexta-feira F
Amanhã	Segunda-feira F	Domingo F

Observe que, se ontem era quarta-feira, temos apenas uma afirmação correta para cada uma das crianças. Portanto, o problema está resolvido.

Conclusão: Ontem era quarta-feira, hoje é quinta-feira e amanhã, sexta.

Lembra da pergunta do problema: Em que dia da semana a brincadeira aconteceu? A resposta é quinta-feira.

Atenção para a avaliação!

Professor/a, ao término do percurso das três sequências didáticas, é importante que os estudantes se conscientizem de suas aprendizagens. Organize com eles uma lista de tudo que fizeram e do que se esperava que aprendessem. Incentive que expressem suas opiniões e, depois, apresente a sua mostrando concordâncias e pontos de vista que são seus e que podem ajudá-los a avançar.

Nada de informações genéricas ou sermões, tais como:

- Precisa estudar mais.
- Precisa prestar mais atenção.

Procure fazer colocações que contribuam com o avanço, como:

- É importante ler e identificar as palavras desconhecidas no momento de resolução de problemas.
- No final da resolução, é importante validar se a sua resposta responde à pergunta do problema.
- No trabalho em grupo, é importante respeitar a opinião e o tempo dos colegas e colaborar para que todos ampliem suas aprendizagens.

Promover uma reflexão com os jovens sobre de que forma exercitar a resolução de problemas matemáticos também pode apoiar a resolução de problemas em outras áreas do conhecimento e na vida como um todo.

Quais processos e aprendizagens eles tiram desses problemas que podem ser levados para momentos de decisão e resolução em suas vidas?

Exemplos de reflexões que podem surgir:

- A análise cuidadosa de todas as informações disponíveis.
- A colaboração entre as pessoas.
- O tempo necessário para refletir sobre as possibilidades, entre outros.

Finalize com um convite:

- Que tal anotar tudo que aprenderam para levar para a série seguinte?

Esta avaliação vai evidenciar aos estudantes seu percurso, mostrar as conquistas pelo que aprenderam e motivá-los a continuar aprendendo com a matemática.

Materiais de apoio

Plano de estudos

Orientações para o estudante em momentos de autogestão

Caro/a, professor/a,

Para os estudantes ampliarem os seus estudos, encontram-se a seguir atividades sobre os temas que foram desenvolvidos em sala de aula durante a SD 3. As questões apresentadas podem ser propostas ao final de cada atividade vivenciada em sala, uma vez que elas estão diretamente relacionadas aos temas desenvolvidos em cada parte desta SD.

Você pode idealizar um plano de estudo específico para cada estudante em função de suas observações sobre o percurso de cada um dos jovens de sua turma. Selecionar questões em função das dificuldades identificadas por você ou pela avaliação diagnóstica permite esse planejamento mais efetivo para o avanço de cada estudante.

Reforce com o estudante a importância do momento de estudo individual, incentive-o a consultar as anotações e os materiais produzidos nas aulas, e oriente-o a registrar uma justificativa para as questões de múltipla-escolha, lembrando-o de que o importante não é a resposta certa, mas sim saber como chegar a ela. Em caso de dúvidas, ele pode conversar com seus colegas ou mesmo procurar o professor no momento oportuno.

Este material também pode contribuir para que o estudante organize a sua rotina e desenvolva procedimentos de estudo. Com a finalidade de ajudá-los, procure dar algumas dicas, como:

- Organização de um cronograma de estudos.
- Registrar suas aprendizagens (gravações de áudios, sínteses, esquemas, mapas de ideias etc.)
- Registrar suas dúvidas para conversar com o/a professor/a sobre elas no momento oportuno.

Bom trabalho!

Bloco de questões referentes à Atividade 1

EXERCÍCIO 1

(G1 - IFPE) Na tentativa de incentivar os alunos da Educação de Jovens e Adultos do Ensino Fundamental II, a Coordenação criou uma gincana em que os estudantes respondiam a perguntas sobre vários assuntos. Numa dessas rodadas da gincana, o professor de Matemática propôs a seguinte pergunta: "Ao quadrado de um número x, você adiciona 7 e obtém sete vezes o número x menos 3. Quais são as raízes dessa equação?" A resposta correta desse problema é:

a) 2 e -5
b) -2 e -5
c) -2 e 5
d) 2 e 5
e) A equação não tem raiz real.

Gabarito: D

EXERCÍCIO 2

Questão: 2067. Descritor: M413. MT fase 2.
O polinômio $P(x) = x^2 - 7x + 10$ pode ser decomposto da seguinte maneira: $P(x) = (x - 2)(x - 5)$. Pode-se afirmar que as raízes de P(x) são:

a) 7 e 10
b) -2 e -5
c) -7 e -10
d) 2 e 5
e) -2 e 5

Gabarito: D

EXERCÍCIO 3

Questão: 1783. Descritor: M462. MT fase 1.
Calcule o valor de x da expressão

$$x = -b + \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

para a = 1; b = 3; c = -10.

a) 3
b) 4
c) 2
d) 10
e) 1

Gabarito: C

EXERCÍCIO 4

Questão: 1987. Descritor: M278. MT fase 2.
As raízes da equação $-x^2 + 6x - 5 = 0$ correspondem às medidas dos lados de um retângulo. Qual o perímetro desse retângulo?

a) 10
b) 12
c) 6
d) 14
e) 4

Gabarito: B

EXERCÍCIO 5

Questão: 1990. Descritor: M282. MT fase 2.
A idade de Júlio ao quadrado menos o quádruplo da sua idade é igual a 60. Qual a idade de Júlio?

a) 14 anos
b) 6 anos
c) 12 anos
d) 8 anos
e) 10 anos

Gabarito: E

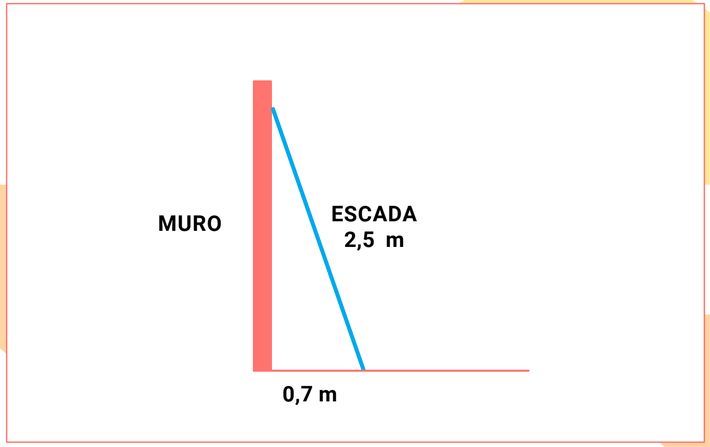
Bloco de questões referentes à Atividade 3

EXERCÍCIO 8

Questão: 1652. Descritor: M154. MT – fase 1.
Uma escada de 2,5 m de comprimento está apoiada em um muro. Sabendo que o pé da escada dista 0,7 m do muro, determine a que altura do solo a escada está apoiada no muro.

a) 2,4 m
b) 2,5 m
c) 1,3 m
d) 1,2 m
e) 0,7 m

Gabarito: A

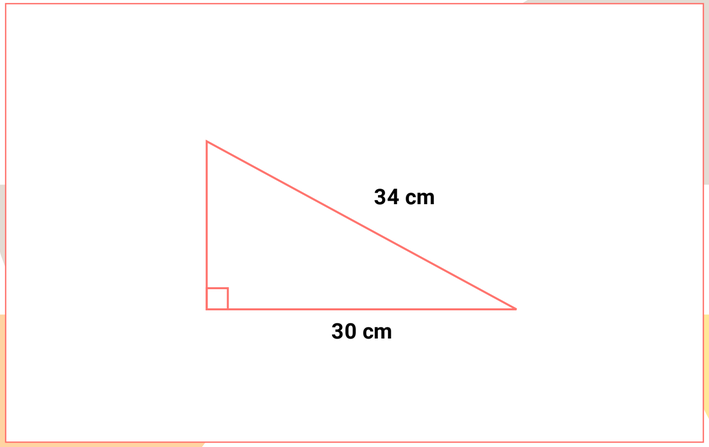


EXERCÍCIO 9

Questão: 1924. Descritor: M179. MT – fase 1.
Determine o perímetro do triângulo retângulo abaixo:

a) 34 cm
b) 16 cm
c) 80 cm
d) 64 cm
e) 50 cm

Gabarito: B

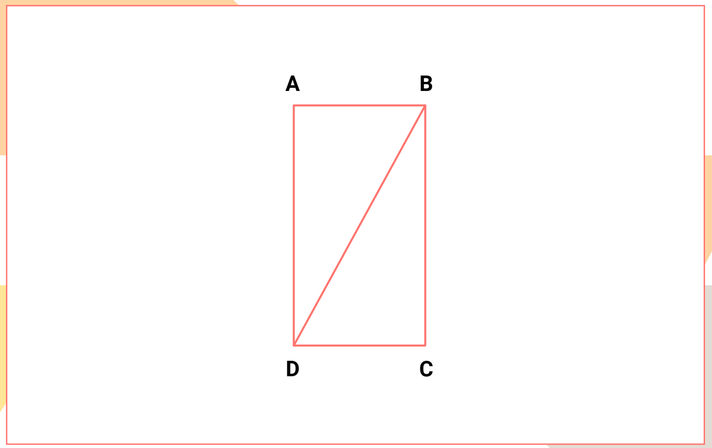


EXERCÍCIO 10

Questão: 19. Descritor: M181. MT – fase 1.
No retângulo abaixo, BD = 61 cm e BC = 60 cm.
Determine a medida do seu perímetro.

a) 60 cm
b) 71 cm
c) 121 cm
d) 132 cm
e) 142 cm

Gabarito: E

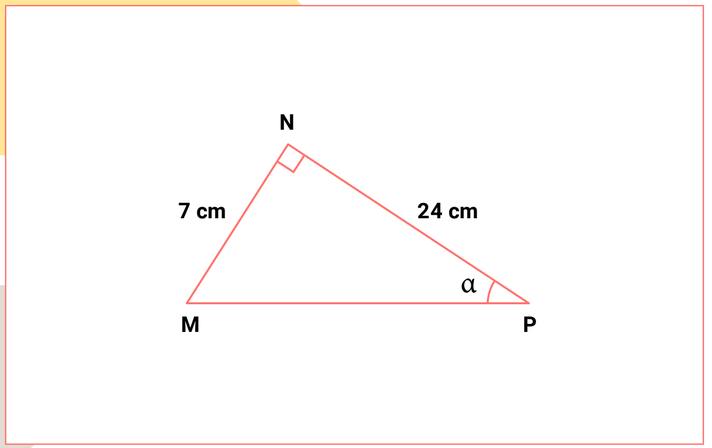


EXERCÍCIO 11

Questão: 1866. Descritor: M084. MT – fase 2.
No triângulo MNP, determine o valor de sen α é

a) 7/25
b) 7/24
c) 25/24
d) 24/25
e) 24/7

Gabarito: A



Anexo 1

EXERCÍCIO 1

Este é um problema literal, você sabe o que isso significa? Além disso, o problema tem várias respostas possíveis na forma de expressões com letras. A sua tarefa é encontrar pelo menos duas delas, considerando que x e y representam números reais positivos. Observe as figuras abaixo e responda:

a) Qual expressão indica a área do quadrado maior?
b) Qual a área desse quadrado quando x = 5 u.a?
   E quando x = 8 u.a?
c) Qual expressão indica a área do quadrado menor?
d) Qual a área desse quadrado quando y = 2u.a?

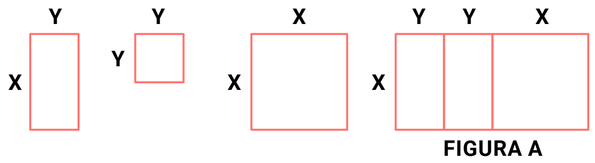


FIGURA A

EXERCÍCIO 2

A professora do 1º ano do EM pediu para seus estudantes escreverem uma expressão que represente a área da figura A. Veja a resposta e a justificativa de dois jovens desta turma e responda as perguntas.

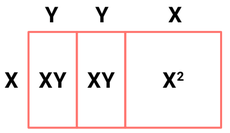
Júlia – A figura A é formada por 3 regiões menores: 2 retângulos e um quadrado. Então, para calcular a área da figura A, basta somar as áreas dessas partes menores: $xy + xy + x^2$, ou então $2xy + x^2$.

Simoni – A figura A é um retângulo cujos lados medem x e y + y + x. A área da figura A é obtida multiplicando a medida dos lados: $x \cdot (y + y + x) = x \cdot (2y + x)$.

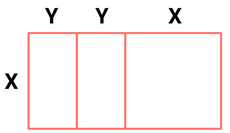
a) Quem está correta: Júlia ou Simoni?

b) É possível afirmar que $x \cdot (y + y + x) = 2xy + x^2$? Explique!

JÚLIA

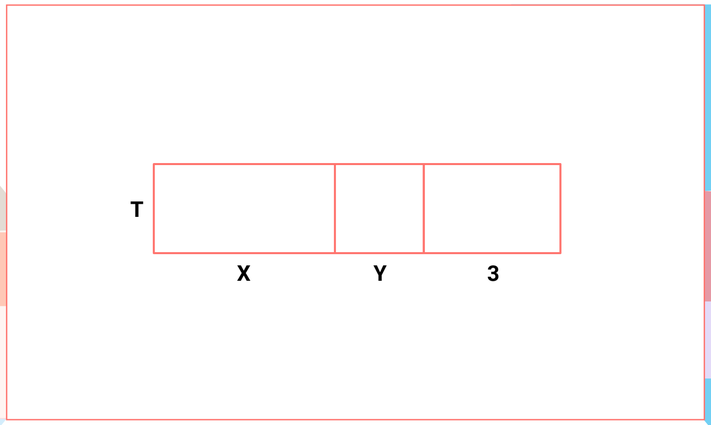


SIMONI



EXERCÍCIO 3

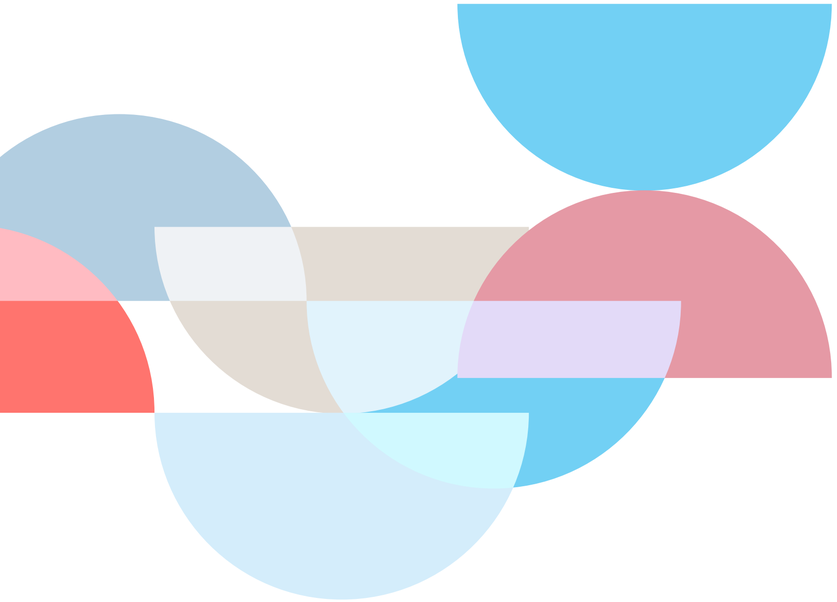
Agora é sua vez! Utilizando as estratégias de Simoni e de Júlia, escreva a área da figura abaixo de duas formas: utilizando a soma e o produto (forma fatorada).

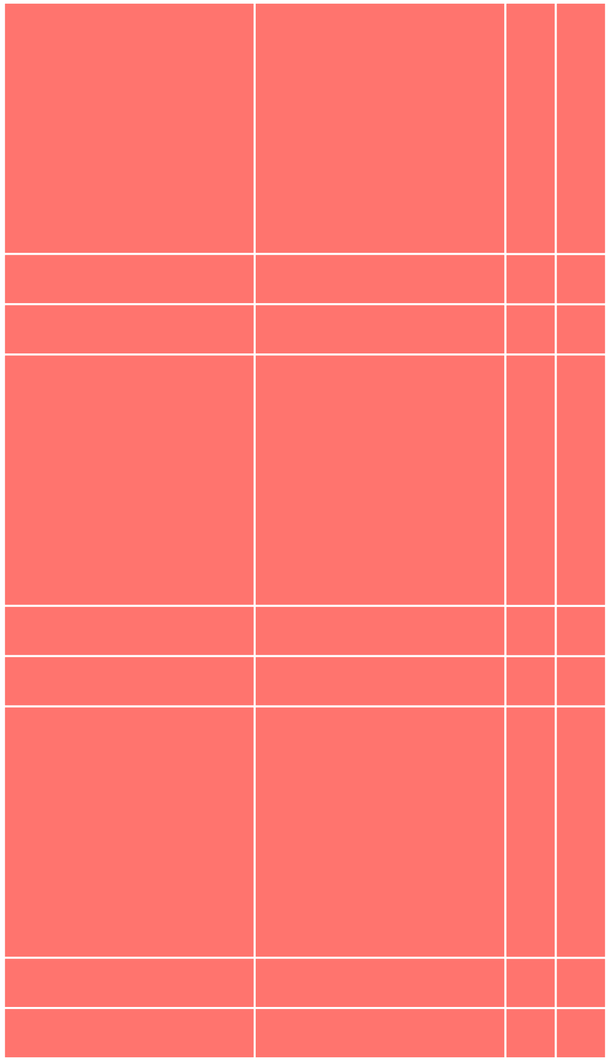


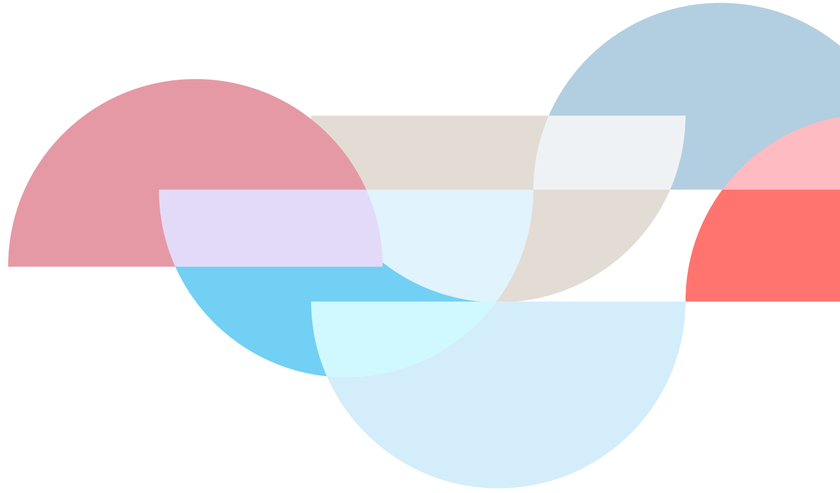
EXERCÍCIO 4

Fatore a expressão algébrica $y^2 - 3xy + 2y$

Anexo 2







Anexo 3

1ª ETAPA:

Acesse o link a seguir e tente resolver o quebra-cabeças: bityli.com/quebra-cabeca (acesso em: 23 maio 2022).

A figura que aparece no centro desse quebra-cabeças é um triângulo retângulo. Após resolver o desafio, reflita:

a) Qual(ais) a(as) cor(es) da(s) peça(s) utilizada(s) para cobrir o quadrado menor?

b) Qual(ais) a(as) cor(es) da(s) peça(s) utilizada(s) para cobrir o quadrado médio?

c) Qual(ais) a(as) cor(es) da(s) peça(s) utilizada(s) para cobrir o quadrado maior?

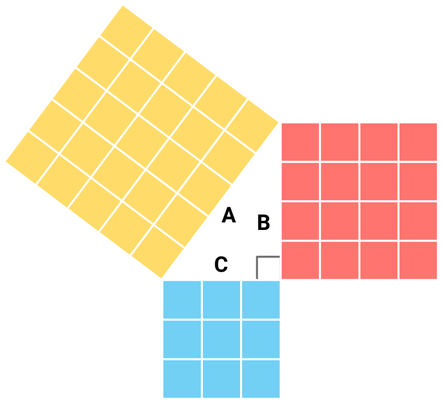
d) Qual a relação entre as áreas desses três quadrados? Explique sua resposta e escreva uma expressão matemática para representar essa situação.

e) Lembrando que a medida dos lados do triângulo retângulo é equivalente à medida dos lados de um dos quadrados, é possível reescrever a sentença anterior utilizando as palavras cateto e hipotenusa?

Registre suas conclusões e suas dúvidas para localizá-las no momento da conversa coletiva.

2ª ETAPA:

A figura a seguir apresenta um triângulo retângulo e 3 quadrados cujos lados coincidem com os catetos e com a hipotenusa desse triângulo. Cada quadrado está dividido em pequenos quadradinhos, todos do mesmo tamanho.



Analise as seguintes situações:

a) Se cada quadradinho possui lado igual a 1 (uma) unidade, identifique a medida dos seguintes elementos:

Hipotenusa a: _____
Cateto b: _____
Cateto c: _____

b) Se cada quadradinho possui lado igual a 2 (duas) unidades, identifique a medida dos seguintes elementos:

Hipotenusa a: _____
Cateto b: _____
Cateto c: _____

c) Se cada quadradinho possui lado igual a 3 (três) unidades, identifique a medida dos seguintes elementos:

Hipotenusa a: _____
Cateto b: _____
Cateto c: _____

d) Qual a regularidade que você observa entre as medidas dos lados desses triângulos?

e) O Teorema de Pitágoras é válido em todas as situações apresentadas? Efetue os cálculos e verifique se sua hipótese estava correta.

Quando as medidas dos lados de um triângulo retângulo são expressos por três números inteiros, esses números são chamados pitagóricos, ou terna pitagórica (três números pitagóricos), isto é:

"Se a, b e c são três números inteiros e positivos tais que $a^2 = b^2 + c^2$, dizemos que a, b e c são números pitagóricos, ou que formam uma terna pitagórica".

f) Utilizando os conhecimentos adquiridos com essa proposta, escreva 3 ternas pitagóricas diferentes das que foram apresentadas acima e explique quais os critérios que você utilizou para descobrir esses números.

Anexo 4

1ª ETAPA:

Observe a sequência 1 de figuras.

a) Para cada casa, escreva o total de peças necessárias na construção. Observe que são quadrados e triângulos. Organize a informação em uma tabela.

b) Descreva e desenhe como serão a 5ª e a 7ª casas.

c) Continue a tabela do item a até a 10ª casa. Explique como você fez para colocar na tabela a quantidade de peças necessárias para a 8ª casa. Existe alguma regularidade na sequência de figuras? Qual?

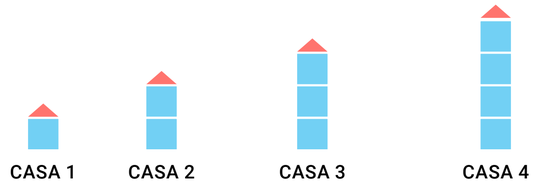
d) Escreva uma regra, isto é, uma lei de formação, que mostre a quantidade de peças (p) para construir uma figura qualquer dessa sequência (n).

Dica: Observe a tabela e, se necessário, primeiro escreva a regularidade com palavras e depois com a escrita matemática.

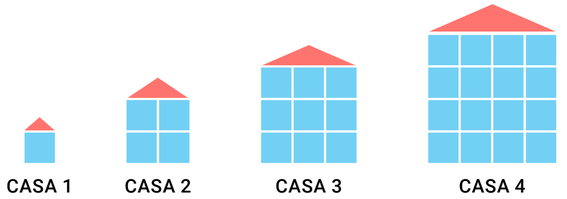
2ª ETAPA:

Repita toda a exploração para a sequência 2 de figuras.

Sequência 1



Sequência 2



Anexo 5

JOGO: FAMÍLIA DAS FUNÇÕES

Materiais:

- 37 cartas com expressões algébricas de funções, esboços de gráficos e características das funções.
- 2 cartas com termo **função**.

Organização da classe: em trios ou quartetos.

Regras:

01. O objetivo do jogo é formar famílias de quatro cartas. Cada família é formada pela expressão algébrica da função, pelo esboço de seu gráfico e por duas outras cartas que contêm propriedades da função, a saber: pontos importantes do gráfico e comportamento do sinal da função. É possível formar, no máximo, dez famílias.

02. Embaralham-se as cartas e coloca-se o baralho sobre a mesa, com a face virada para baixo.

03. Um dos jogadores tira uma das cartas do baralho e a coloca sobre a mesa, com a face virada para cima.

04. O próximo a jogar procede do mesmo modo.

05. Se a carta tirada por um dos jogadores pertence à mesma família de uma das cartas já viradas, coloca-se a carta retirada embaixo da carta de mesma família. Caso contrário, coloca-se a carta sobre a mesa sem aproximá-la de outras cartas.

06. Se um dos jogadores colocar uma das cartas na família errada, ele perde a vez de jogar e essa carta é colocada no fim do baralho.

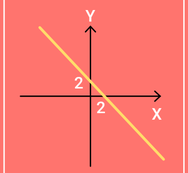
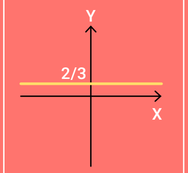
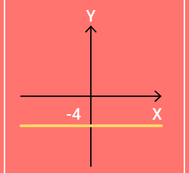
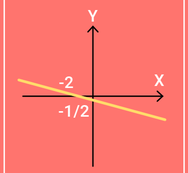
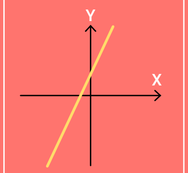
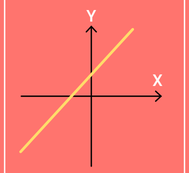
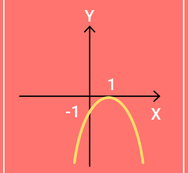
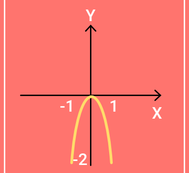
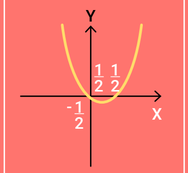
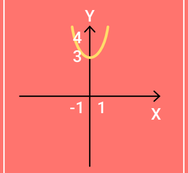
07. Se a carta tirada por um jogador for uma carta **função,** ele poderá utiliza-lá em qualquer momento do jogo para formar uma família.

08. O jogo termina quando não for possível formar mais famílias.

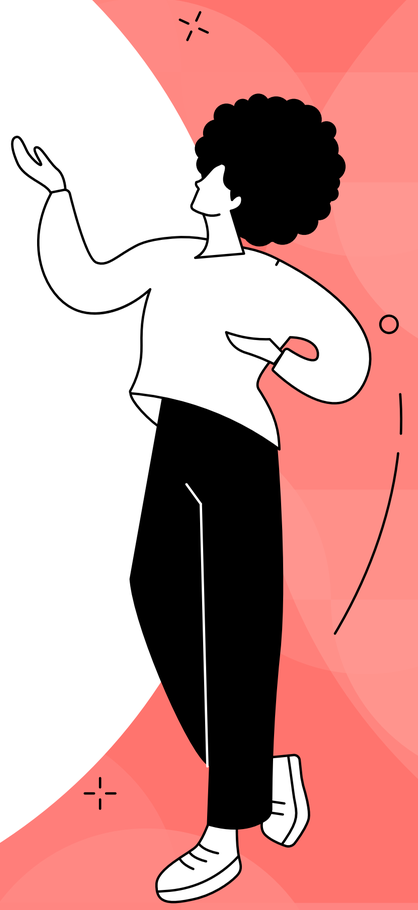
09. Ganha o jogo quem tiver maior pontuação, de acordo com as seguintes regras:

- Sempre que um dos jogadores retirar uma carta que pertence à mesma família de uma das cartas da mesa, coloca a carta retirada ao lado da carta de mesma família e ganha 1 ponto.
- O jogador que completar uma das famílias ganha 5 pontos.

Cartas: veja as cartas na página a seguir!

$y = 2 / 3$	$y = -4$	$y = (-1/4)\,x - 1/2$	$y = -x + 2$	$y = 2x + 1$	$y = x + 1$	$y = -x^2 + 2x - 1$	$y = -3x^2$	$y = 2x^2 - x$	$y = 2x^2 + 3$
$y = 2/3$ para qualquer x do domínio	-2 é a raíz da função	$y \leq 0$ quando $x \leq -1/2$; e $y \geq 0$ quando $x \geq 1/2$	1 é coeficiente angular e linear da função	é uma função afim decrescente	possui uma concavidade para baixo e $f(0) = -1$	y é crescente em $]-\infty, 0]$ e decrescente em $[0, +\infty[$	$y = -4$ para qualquer x do domínio	FUNÇÃO	FUNÇÃO
									

Anexo 6



A professora do 1º ano pediu que seus alunos resolvessem a seguinte equação do 2º grau incompleta: $x^2 - 81 = 0$. Abaixo estão as estratégias utilizadas por 3 jovens desta turma. O seu desafio é compreender a resolução de cada jovem e verificar se ela está correta. Caso a resposta esteja incorreta, você precisa escrever uma pista para ajudar o estudante a aprimorar a sua estratégia.

MANU

Eu acho mais fácil resolver por cálculo mental. Primeiro eu sei que a equação $x^2 - 81 = 0$ é equivalente a $x^2 = 81$.
Para resolver essa equação, eu preciso pensar em um número que elevado ao quadrado dá 81.
Essa é fácil!
Eu sei que $(-9)^2 = 81$, então a resposta é -9.

CRIS

Eu resolvi assim:
$x^2 - 81 = 0$
$x^2 = 81$
Existem 2 números que tornam essa equação verdadeira:
o 9 e o (-9), pois $(9)^2 = 81$ e $(-9)^2 = 81$.
Então são duas as respostas: 9 e -9.

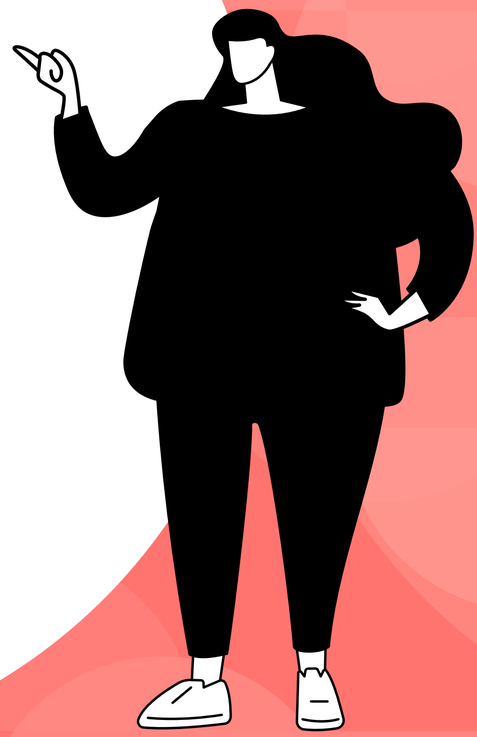
PEDRO

Eu sei que preciso encontrar o valor da incógnita x que torna a sentença verdadeira.
Então, eu pensei assim:
$x^2 - 81 = 0$
$x^2 - 81 + 81 = 0 + 81$
$x^2 = 81$
A resposta é 9, pois $9^2 = 81$.

Resposta: Espera-se que os estudantes concluam que a Cris está correta e que escrevam para os demais a seguinte pista: existem 2 números que tornam essa equação $x^2 - 81 = 0$ verdadeira:
o 9 e o (-9), pois $(9)^2 = 81$ e $(-9)^2 = 81$.

Agora que você analisou as resoluções de Pedro, Manu e Cris, volte nas equações do 2º grau apresentadas no início desta proposta. Selecione e resolva em seu caderno aquelas que possuem as mesmas características que a equação resolvida pelos jovens.

Anexo 7



Proposta de trabalho para a aula invertida

01. Assista ao vídeo disponível em: bityli.com/baskhara (acesso em: 16 maio 2022). Você pode assisti-lo quantas vezes achar necessário. Em seguida, reflita sobre as seguintes questões e registre suas conclusões:

a) Qual a equação do 2º grau apresentada inicialmente? Nesta equação, qual o valor dos coeficientes a, b e c?

a) Você poderia resolver essa equação utilizando um dos métodos que você já estudou?

a) Qual a fórmula de Bhaskara?

a) Assim como foi feito no vídeo, resolva a equação $x^2 + 4x - 21 = 0$ utilizando a fórmula.

a) Você resolveu a mesma equação com duas estratégias diferentes. As respostas encontradas foram as mesmas?

a) Qual das estratégias você achou mais fácil?

a) Em que situações você acha mais adequado utilizar a fórmula de Bhaskara?

02. Assista ao vídeo disponível em: bityli.com/exemplo-baskhara (acesso em: 7 ago. 2022) e explique como foi resolvida a equação $-x^2 + 8x = 1$ nesse vídeo.

03. Pronto você concluiu sua tarefa! Agora junte suas anotações, suas conclusões e suas dúvidas, e traga-as para a aula do dia XX/XX/XX. Com seus colegas e o/a professor/a, você poderá solucionar as dúvidas, contar suas descobertas e avançar com suas aprendizagens. Se você quiser usar outro canal para estudar, não há problema. Apenas anote o nome/endereço para que possamos analisar coletivamente essa opção e compartilhar com a turma.

Anexo 8

Leia cada proposta com atenção, analise cada pergunta, converse com seu colega de dupla a respeito das dúvidas e aprendizagens, e anote suas conclusões.

01. Usando a tecla $\sqrt{}$ da calculadora, determine as raízes exatas ou aproximadas para os valores da 1ª linha da tabela:

$\sqrt{}$	1	2	3	4	5	6	8

02. Observe que $\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$, ou seja, $\sqrt{2}$ é um número entre 1 e 2. Utilize este fato e os valores que encontrou para $\sqrt{6}$ e $\sqrt{8}$ para estimar $\sqrt{7}$.

03. Com base nos conceitos estudados na sequência didática anterior, sobre números racionais irracionais, classifique os números da tabela acima como racionais ou irracionais. Se necessário, retome as anotações que você realizou sobre esse tema.

04. Com sua calculadora, usando a tecla $\sqrt{}$, preencha a tabela abaixo. Em seguida, responda:

a) Compare os resultados nas colunas I e II. Que relação você acha que existe entre os resultados dessas duas colunas?

b) Compare os resultados nas colunas III e IV. Que relação existe entre eles?

c) Compare os resultados obtidos nas colunas V e VI e nas colunas VII e VIII. O que você pode dizer sobre eles?

d) Preencha as lacunas com os símbolos = ou ≠:

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ___ $\sqrt{(a+b)}$ $\quad\quad$ $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ___ $\sqrt{(a-b)}$

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ___ $\sqrt{(a.b)}$ $\quad\quad$ $\sqrt{a} / \sqrt{a}$ ___ $\sqrt{(a/b)}$

e) Essas conclusões ainda são válidas se a ou b forem iguais a zero?

a	b	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\sqrt{(a+b)}$	$\sqrt{a} - \sqrt{b}$	$\sqrt{(a-b)}$	$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$	$\sqrt{(a.b)}$	$\sqrt{a} / \sqrt{a}$	$\sqrt{(a/b)}$
16	4								
25	9								
121	36								
64	49								
32	17								
49	144								
		I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII

Anexo 9

1ª ETAPA

Para começar, meçam e cortem pedaços de canudos nestas quantidades e medidas:

- 3 pedaços de 2cm
- 2 pedaços de 3cm
- 1 pedaço de 4cm, 5cm, 6cm e 7cm, respectivamente.

Agora, tentem formar triângulos utilizando três peças de cada vez e registrem o resultado na tabela a seguir:

Lado 1	Lado 2	Lado 3	Foi possível construir o triângulo? (sim ou não)
2	3	4	
2	3	5	
2	3	6	
2	3	7	
2	2	2	
3	4	5	
3	4	6	
3	4	7	
3	2	3	

Nem sempre foi possível construir os triângulos, não é?

O que acontece com as medidas dos lados quando o triângulo existe? O que acontece com essas medidas que impedem a formação de um triângulo?

Conversem em grupos sobre essas questões e depois completem a frase:

Para que um triângulo exista,
é preciso que...

Para terminar, escrevam **sim** ou **não** para registrar se existem ou não os seguintes triângulos com lados medindo:

a) 10cm, 8cm e 7cm?

b) 8cm, 4cm e 3cm?

c) 2cm, 4cm e 6cm?

d) 3cm, 4cm e 5cm?

e) 3cm, 5cm e 6cm?

f) 4cm, 10cm e 5cm?

Em cada caso, escrevam em seus cadernos a justificativa para sua resposta.

2ª ETAPA

Resolvam as atividades a seguir, lembrando que:

- Se houver dúvida, anotem-na para discutir em sala com os colegas e o professor/a.
- Vocês podem também tirar dúvidas com outras duplas.
- Sempre é possível rever o vídeo e mesmo consultar o seu lapbook, pois eles têm uma revisão de ângulos.

01. Complete as definições:

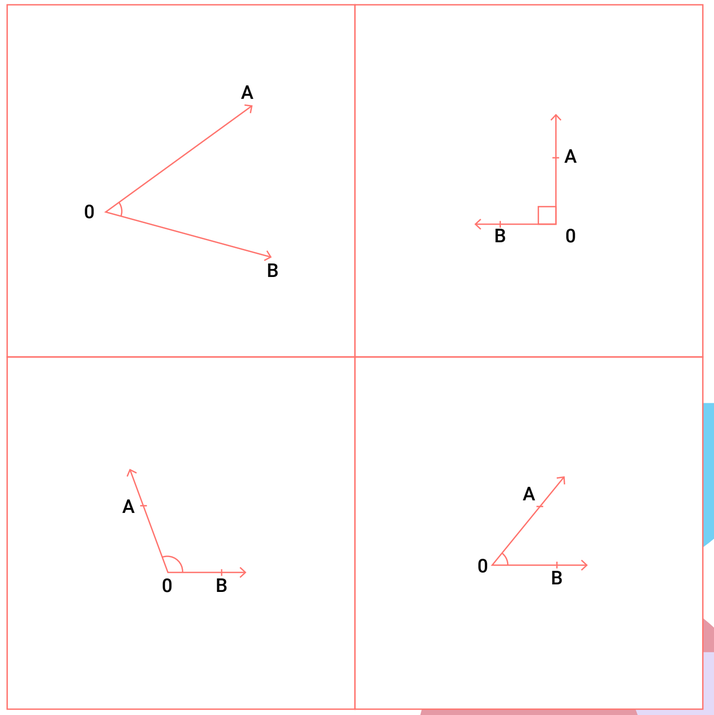
a) Um ângulo reto é aquele que mede _____

b) Um ângulo agudo mede _____ de _____

c) Um ângulo obtuso mede _____ de _____

d) Um ângulo raso mede _____

2. Meça cada um dos ângulos a seguir e diga se ele é agudo, obtuso ou reto:



3. Usando a régua e o transferidor, construa no seu caderno os ângulos pedidos:

a) Um ângulo reto

b) Um ângulo de 45°

c) Um ângulo de 20°

d) Um ângulo de 160°

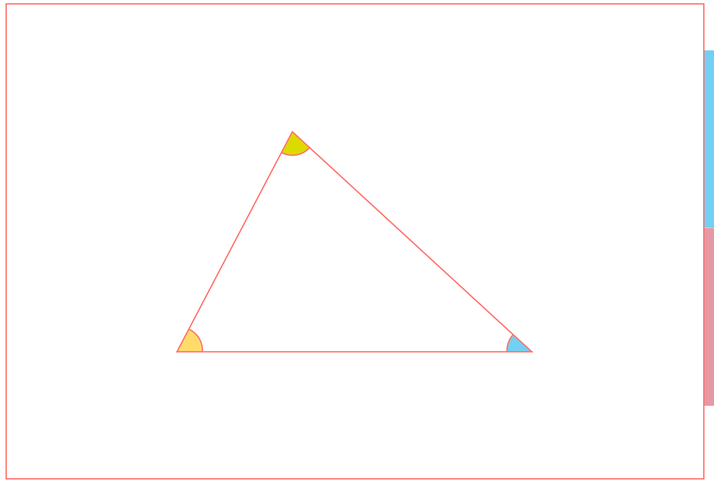
3ª ETAPA

01. Fazendo dobras

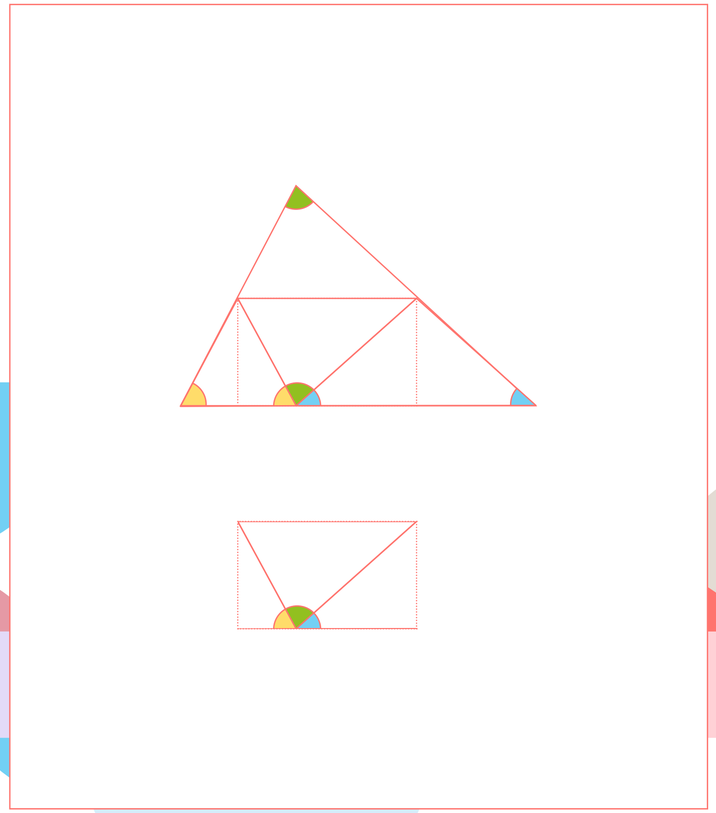
Para realizar esta atividade, cuide bem das dobraduras pedidas em cada etapa para descobrir quanto vale a soma dos ângulos internos de um triângulo.

a) Cada um de vocês deve usar a régua e traçar um triângulo diferente. Tentem não fazer triângulos que tenham todos os lados da mesma medida.

b) Após terminar, pinte os três ângulos, como mostra a imagem, e recorte o triângulo.



c) Agora observem e dobrem o triângulo construído como na imagem:



d) Se você dobrou como devia, percebeu que os ângulos juntos formam uma meia volta, um ângulo de 180º, isto é, 18º graus. Agora complete a seguinte afirmação:

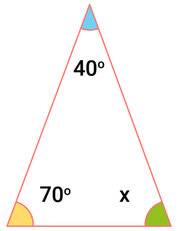
a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a _____

02. Testando o que foi aprendido

Vamos utilizar o que você aprendeu para resolver problemas e calcular medidas nos triângulos?

a) Aqui estão dois problemas resolvidos: um deles está correto e o outro tem um erro. Seu desafio é verificar qual deles não está correto e corrigi-lo.

Qual é a medida do ângulo x deste triângulo?
O ângulo x mede 70°.



70° + 40° = 110°
180° - 110° = 70°
x = 70°

ou

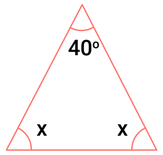
x + 70° + 40° = 180°
x = 180° - 70° - 40°
x = 70°

As medidas dos ângulos internos de um triângulo são x, 3x e 5x respectivamente. Calcule o valor de x.

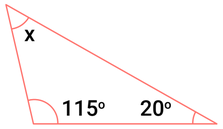
x + 3x + 5x = 180°
10x = 180°
x = 180° /10
x = 18°
O ângulo x mede 18°.

03. Nos triângulos a seguir, calcule o valor dos ângulos desconhecidos:

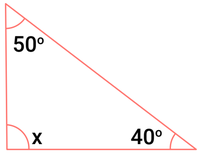
a)



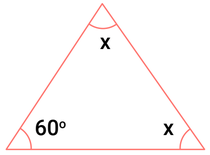
b)



c)



d)



04. Agora responda quanto mede (m):

a) o terceiro ângulo de um triângulo que tem um ângulo de 60° e outro 65°?

b) os ângulos de um triângulo que tem um ângulo reto e o outro medindo 35°?

c) o terceiro ângulo de um triângulo com ângulos 50° e 135°?

d) os três ângulos de mesma medida de um triângulo?

Anexo 10

01. Antes de iniciar a construção do teodolito e a medição da árvore, registre sua estimativa:

Eu estimo que a árvore tem _____ de altura.

02. Construa do teodolito:

Materiais:

- 1 pedaço de cartolina grossa de 20 cm x 20 cm ou tampa de embalagem de papelão;
- copo de plástico;
- 1 percevejo ou alfinete de cabeça ou parafuso e porca;
- fita adesiva;
- canudo de refrigerante;
- palito de sorvete;
- cópia de transferidor de 360°.

Atenção: Você pode substituir os materiais da lista por outros similares.

Etapas de construção:

a) Com fita adesiva, fixe o palito de sorvete na base do copo. Fixe também o canudo na parte vazada. Atenção: o canudo e o palito de sorvete precisam passar pelos centros das circunferências e apontarem para a mesma direção. Se necessário, recorte um pedaço do canudo ou do palito. O canudo será o ponteiro do teodolito, que permitirá fazer a leitura em graus no transferidor. O palito será a mira por onde você avistará os pontos a serem medidos.

b) Cole a cópia do transferidor na cartolina ou tampa de embalagem.

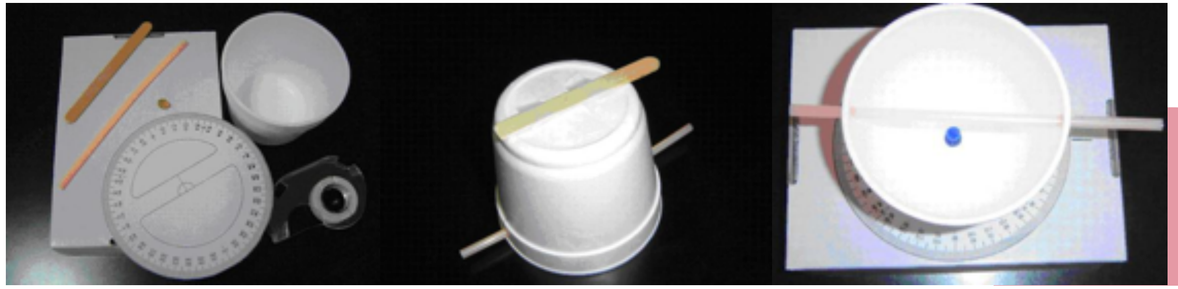
c) Com o percevejo, fixe o copo na tampa da caixa, de modo que o percevejo passe pelo centro da base do copo e pela marca do centro do transferidor.

d) Faça duas marcas como as mostradas na figura: uma na extremidade do palito de sorvete para servir como ponteiro e outra na mesma direção do zero da cópia do transfer.

Está pronto o seu teodolito. A versão caseira funciona como o aparelho verdadeiro. Com ele, você mede, a partir da sua posição, o ângulo formado entre dois outros pontos.

Na horizontal ou na vertical, basta alinhar a indicação 0° do transferidor com um dos pontos e girar a mira até avistar o outro ponto. O ponteiro indicará de quantos graus é a variação.

Apesar de não se obter medidas exatas com esse instrumento, chega-se a medidas aproximadas de distâncias e alturas de objetos não acessíveis de forma direta.



03. Medindo e coletando as informações necessárias

- O primeiro passo consiste em posicionar o teodolito na posição horizontal de modo que o palito fique paralelo ao chão, conforme figura anterior.
- O segundo passo consiste em deslocar o canudo focando o ponto mais alto da árvore.
- Em seguida, observe (na cópia do transferidor) e anote a medida do ângulo formado entre o palito e o canudo.
- Determine também a distância entre a pessoa que está fazendo a medição e a árvore.
- Represente todas essas informações em um desenho.

04. Fazendo cálculos para obter a altura da árvore

Em grupos, observem o desenho elaborado na atividade anterior, identifiquem quais as medidas conhecidas e qual o valor que vocês procuram. Conversem e busquem uma estratégia para resolver esse problema.

Utilizem a calculadora para agilizar os cálculos. Se necessário, vocês podem consultar os registros realizados nas aulas anteriores e a tabela trigonométrica disponível na internet ou no material didático.

Registre sua conclusão no espaço abaixo:

Após os cálculos realizados, podemos afirmar que a árvore tem _____ de altura.

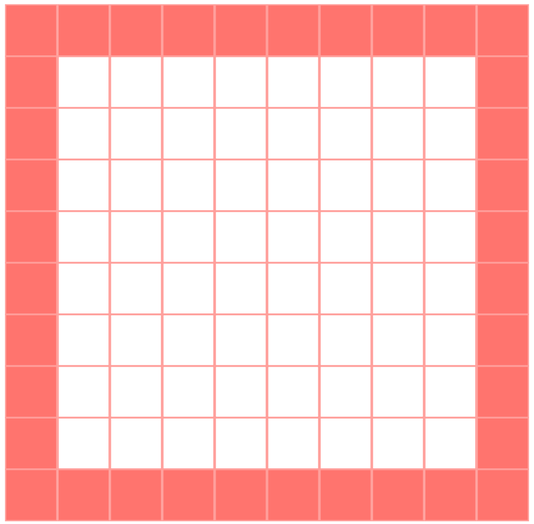
Agora conversem sobre as seguintes questões:

- A sua estimativa estava próxima da medida obtida com os cálculos?
- Vocês acham que a medida obtida com os cálculos é a medida exata da altura da árvore? Explique!

Para finalizar, conversem com os colegas do grupo sobre como foi realizar essa proposta, o que acharam mais difícil e quais as aprendizagens. Registrem suas conclusões para socializarem no momento coletivo.

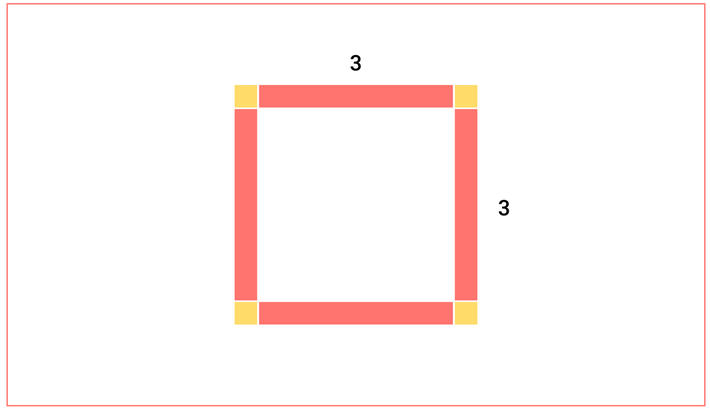
Anexo 11

PARTE 1

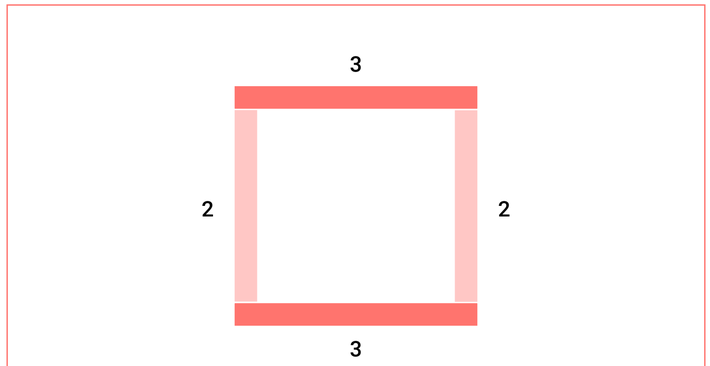


PARTE 2

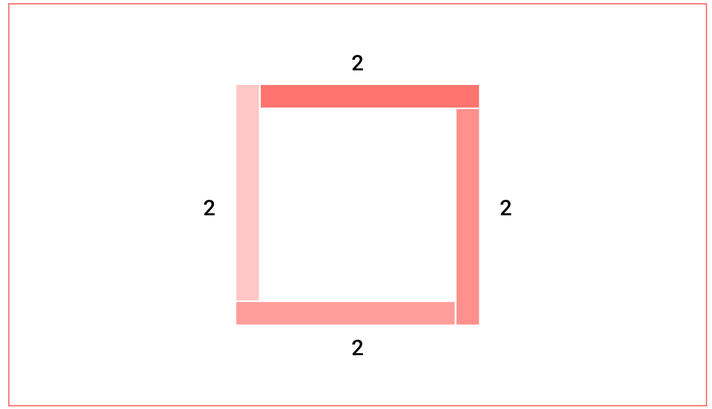
O primeiro estudante disse: *multiplica 3 x 3 e subtrai 4*.



A segunda aluna falou: *3 + 3 + 2 + 2*.



A terceira estudante disse: eu fiz *2 + 2 + 2 + 2*.



reúna

INSTITUTO
UNIBANCO